

## 10. WYKŁAD 10: MODUŁY WOLNE.

**Definicja 10.1.** Niech  $R$  będzie pierścieniem z jedyneką. Lewy unitarny  $R$ -moduł  $M$  nazywamy **modułem wolnym**, gdy  $M = \sum_{i \in I} \langle f_i \rangle$ , gdzie  $\langle f_i \rangle \cong R$ ,  $i \in I$ . Rodzinę  $\{f_i : i \in I\}$  nazywamy **bazą** (lub zbiorem wolnych generatorów) modułu wolnego  $M$ .

**Przykłady:**

- (1) Niech  $F$  będzie ciałem,  $V$  przestrzenią liniową nad  $F$ . Wówczas  $V$  jest  $F$ -modułem wolnym.
- (2) Niech  $F$  będzie wolną grupą abelową. Wówczas  $F$  jest  $\mathbb{Z}$ -modułem wolnym.
- (3) Niech  $F$  będzie ciałem,  $V$  przestrzenią liniową nad ciałem  $F$ ,  $\dim V < \infty$ , niech  $\tau \in \text{End} V$ . Wówczas  $V$  nie jest  $F[x]$ -modułem wolnym.

**Twierdzenie 10.1.** Niech  $R$  będzie pierścieniem z jedyneką.

- (1) Niech  $M$  będzie lewym  $R$ -modułem wolnym z bazą  $\{f_i : i \in I\}$ . Każdy element  $f \in M$  ma jednoznaczne przedstawienie postaci

$$f = \sum_{i \in I} x_i f_i,$$

gdzie  $x_i \in R$  oraz  $x_i = 0$  dla prawie wszystkich  $i \in I$ .

- (2) Istnieje  $R$ -moduł wolny o bazie dowolnej mocy.

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup i pozostawiamy go czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Rezultaty dotyczące rangi wolnych grup abelowych (część (3) Twierdzenia 3.1 oraz Twierdzenie 3.2) nie przenoszą się bezpośrednio na moduły wolne i wymagają bardziej finezyjnego podejścia. Omówimy teraz pokrótce te zagadnienia.

**Twierdzenie 10.2.** Niech  $R$  będzie pierścieniem z jedyneką, niech  $M$  będzie lewym  $R$ -modułem wolnym z nieskończoną bazą  $\{f_i : i \in I\}$ . Wówczas dowolna baza  $M$  jest równoliczna z  $\{f_i : i \in I\}$ .

*Dowód.* Załóżmy, że  $M = \sum_{i \in I} \langle f_i \rangle$ , gdzie  $\langle f_i \rangle \cong R$ ,  $i \in I$  i ustalmy dowolną bazę  $\{g_j : j \in J\}$  modułu  $M$ , to znaczy niech  $M \cong \sum_{j \in J} \langle g_j \rangle$ , gdzie  $\langle g_j \rangle \cong R$ ,  $j \in J$ .

Pokażemy najpierw, że baza  $\{g_j : j \in J\}$  jest nieskończona. Przypuśćmy bowiem, że  $\{g_j : j \in J\}$  jest skończona. Ponieważ zbiór  $\{g_j : j \in J\}$  w szczególności generuje  $M$  oraz każdy element  $g_j$ ,  $j \in J$ , jest skończoną kombinacją elementów  $f_i$ ,  $i \in I$ , istnieje skończony zbiór  $\{f_1, \dots, f_m\} \subset \{f_i : i \in I\}$  generujący  $M$ . Ponieważ baza  $\{f_i : i \in I\}$  jest nieskończona, istnieje element  $f \in \{f_i : i \in I\} \setminus \{f_1, \dots, f_m\}$ . Wówczas  $f = \sum_{i=1}^m x_i f_i$ , dla pewnych  $x_i \in R$ , oraz  $f = f$  są dwoma różnymi przedstawieniami  $f \in M$ , co daje sprzeczność.

Niech  $\mathcal{P}(\{g_j : j \in J\})$  oznacza rodzinę wszystkich skończonych podzbiorów zbioru  $\{g_j : j \in J\}$ . Zdefiniujmy odwzorowanie  $\Phi : \{f_i : i \in I\} \rightarrow \mathcal{P}(\{g_j : j \in J\})$  wzorem

$$\Phi(f) = \{g_1, \dots, g_n\}, \text{ jeżeli } f \text{ ma przedstawienie } f = \sum_{j=1}^n x_j g_j \text{ dla pewnych } x_i \in R \setminus \{0\}.$$

Ponieważ  $\{g_j : j \in J\}$  jest bazą, elementy  $g_1, \dots, g_n$  są jednoznacznie wyznaczone i  $\Phi$  jest niniejszym dobrze określoną funkcją.

Pokażemy, że  $\text{im } \Phi$  jest nieskończony. Na odwrót, przypuśćmy, że  $\text{im } \Phi$  jest skończony. Wówczas  $\bigcup_{S \in \text{im } \Phi} S$  jest skończonym podzbiorem  $\{g_j : j \in J\}$  generującym  $\{f_i : i \in I\}$ , a więc  $M$ . Jak poprzednio, ponieważ baza  $\{g_j : j \in J\}$  jest nieskończona, istnieje element  $g \in \{g_j : j \in J\} \setminus \bigcup_{S \in \text{im } \Phi} S$ . Wówczas  $g = \sum_{g_i \in \bigcup_{S \in \text{im } \Phi} S} x_i g_i$ , dla pewnych  $x_i \in R$ , oraz  $g = g$ , co daje sprzeczność.

Ustalmy  $T \in \text{im } \Phi$ . Pokażemy, że zbiór  $\Phi^{-1}(T)$  jest skończony. Ustalmy w tym celu element  $f \in \Phi^{-1}(T)$ . Wówczas  $f \in \langle T \rangle$ . Wobec tego  $\Phi^{-1}(T) \subset \langle T \rangle$ . Ponieważ  $T$  jest skończony i każdy element  $g \in T$  jest skończoną kombinacją  $f_i$ ,  $i \in I$ , istnieje skończony podzbiór  $S \subset \{f_i : i \in I\}$  taki, że  $\langle T \rangle \subset \langle S \rangle$ . Wobec tego  $f \in \langle S \rangle$  i  $f$  jest kombinacją elementów zbioru  $S$ , a zatem  $f \in S$ , w przeciwnym bowiem razie otrzymujemy dwa możliwe przedstawienia elementu  $f$ . Tym samym  $\Phi^{-1}(T) \subset S$  i jako taki jest skończony.

Niech  $\Phi^{-1}(T) = \{f_1, \dots, f_n\}$  i zdefiniujmy odwzorowanie  $\Psi_T : \Phi^{-1}(T) \rightarrow \text{im } \Phi \times \mathbb{N}$  wzorem

$$\Psi_T(f_k) = (T, k).$$

Bez trudu sprawdzamy, że odwzorowanie  $\Psi_T$  jest różnowartościowe i że rodzina  $\{\Phi^{-1}(T) : T \in \text{im } \Phi\}$  tworzy partycję zbioru  $\{f_i : i \in I\}$ . Dalej, zdefiniujmy odwzorowanie  $\Psi : \{f_i : i \in I\} \rightarrow \text{im } \Phi \times \mathbb{N}$  wzorem

$$\Psi(f_k) = \Psi_T(f_k), \text{ o ile } f_k \in \Phi^{-1}(T).$$

Znowu łatwo sprawdzamy, że  $\Psi$  jest różnowartościowe i dobrze zdefiniowane. Wobec tego  $|\{f_i : i \in I\}| \leq |\text{im } \Phi \times \mathbb{N}|$  i tym samym

$$|\{f_i : i \in I\}| \leq |\text{im } \Phi \times \mathbb{N}| = |\text{im } \Phi| \cdot \aleph_0 = |\text{im } \Phi| \leq |\mathcal{P}(\{g_j : j \in J\})| = |\{g_j : j \in J\}|.$$

Powtarzając rozumowanie z  $\{f_i : i \in I\}$  i  $\{g_j : j \in J\}$  zamienionymi miejscami otrzymujemy również  $|\{f_i : i \in I\}| \geq |\{g_j : j \in J\}|$ , co kończy dowód.  $\square$

**Definicja 10.2.** Niech  $R$  będzie pierścieniem z jedyneką. Jeżeli dowolny niezerowy element  $R$  ma element odwrotny, to  $R$  nazywamy **pierścieniem z dzieleniem** (lub **ciałem nieprzemienne**, lub **ciałem skończym**).

**Twierdzenie 10.3.** Niech  $R$  będzie pierścieniem z dzieleniem,  $M$  lewym  $R$ -modułem wolnym z bazą  $\{f_i : i \in I\}$ . Wówczas dowolna baza  $M$  jest równoliczna z  $\{f_i : i \in I\}$ .

*Dowód.* Załóżmy, że  $M = \sum_{i \in I} \langle f_i \rangle$ , gdzie  $\langle f_i \rangle \cong R$ ,  $i \in I$  i ustalmy dowolną bazę  $\{g_j : j \in J\}$  modułu  $M$ , to znaczy niech  $M \cong \sum_{j \in J} \langle g_j \rangle$ , gdzie  $\langle g_j \rangle \cong R$ ,  $j \in J$ .

Jeżeli  $|\{f_i : i \in I\}| = \infty$  lub  $|\{g_j : j \in J\}| = \infty$ , to wobec poprzedniego twierdzenia  $|\{f_i : i \in I\}| = |\{g_j : j \in J\}|$ . Załóżmy więc, że  $\{f_i : i \in I\} = \{f_1, \dots, f_n\}$  oraz  $\{g_j : j \in J\} = \{g_1, \dots, g_m\}$ . Niech  $g_m = r_1 f_1 + \dots + r_n f_n$ , dla pewnych  $r_1, \dots, r_n \in R$  i powiedzmy, że  $r_k$  jest niezerowym elementem o najniższym indeksie. Wówczas  $f_k = r_k^{-1} g_m - r_k^{-1} r_{k+1} f_{k+1} - \dots - r_n f_n$ . Wobec tego zbiór  $\{g_m, f_1, \dots, f_{k-1}, f_{k+1}, \dots, f_n\}$  generuje  $M$ . Tym samym  $g_{m-1} = s_m g_m + t_1 f_1 + \dots + t_{k-1} f_{k-1} + t_{k+1} f_{k+1} + \dots + t_n f_n$ , dla pewnych  $s_m, t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_n \in R$ . Nie wszystkie  $t_i$  są równe zeru (w przeciwnym razie  $g_{m-1} - s_m g_m = 0$  dawałoby nietrywialne przedstawienie 0 jako kombinacji  $g_1, \dots, g_m$ ), niech więc  $t_j$  będzie elementem niezerowym o najniższym indeksie. Wówczas  $x_j = t_j^{-1} g_{m-1} - t_j^{-1} s_m g_m - t_j^{-1} t_{j+1} f_{j+1} - \dots - t_j^{-1} t_n f_n$ . Wobec tego zbiór  $\{g_m, g_{m-1}\} \cup \{f_1, \dots, f_n\} \setminus \{f_j, f_k\}$  generuje  $M$ . Tym samym  $g_{m-2}$  jest kombinacją liniową  $g_m, g_{m-1}$  i  $f_i$ , dla  $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j, k\}$ . Proces dodawania kolejnych  $g_i$  i eliminowania kolejnych  $f_i$  może być kontynuowany. Pod koniec  $k$ -tego kroku otrzymujemy zbiór  $\{g_m, g_{m-1}, \dots, g_{m-k+1}\}$  wraz ze zbiorem  $n - k$  elementów  $f_i$ , których suma mnogościowa generuje  $M$ . Jeśli  $n < m$ , to pod koniec  $n$ -tego kroku otrzymamy, że  $\{g_m, \dots, g_{m-n+1}\}$  generuje  $M$ . Ponieważ  $m - n + 1 \geq 2$ , element  $g_1$  byłby liniową kombinacją  $\{g_m, \dots, g_{m-n+1}\}$ , co jest niemożliwe. Zatem  $n \geq m$ . Powtarzając rozumowanie z  $\{f_i : i \in I\}$  i  $\{g_j : j \in J\}$  zamienionymi miejscami otrzymujemy  $n = m$ .  $\square$

**Definicja 10.3.** Niech  $R$  będzie pierścieniem z jedyneką. Jeżeli dla dowolnego lewego  $R$ -modułu wolnego  $M$  każde dwie bazy są tej samej mocy, to mówimy, że  $R$  ma **własność niezmiennika bazowego** (lub że jest pierścieniem **IBP**, invariant basis property).

Jeżeli  $R$  jest pierścieniem z własnością niezmiennika bazowego, a  $M$  lewym  $R$ -modułem wolnym, to moc dowolnej bazy modułu  $M$  nazywamy jego **rangą**.

**Przykład:**

(4) Niech  $R$  będzie pierścieniem z dzieleniem. Wówczas  $R$  ma własność niezmiennika bazowego.

**Wniosek 10.1.** Niech  $R$  będzie pierścieniem z własnością niezmiennika bazowego, niech  $M$  i  $N$  będą lewymi  $R$ -modułami wolnymi. Wówczas  $M \cong N$  wtedy i tylko wtedy, gdy bazy  $M$  i  $N$  są równej mocy.

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup i pozostawiamy go czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

**Lemat 10.1.** Niech  $R$  będzie pierścieniem z jedynką, niech  $I \triangleleft R$ , niech  $M$  będzie lewym  $R$ -modułem wolnym z bazą  $\{f_j : j \in J\}$ , niech  $\kappa : M \rightarrow M/IM$  oznacza epimorfizm kanoniczny oraz

$$IM = \{r_1 m_1 + \dots + r_n m_n : r_i \in I, m_i \in M, n \in \mathbb{N}\}.$$

Wówczas  $M/IM$  jest lewym  $R/I$ -modułem wolnym z bazą  $\{\kappa(f_j) : j \in J\}$  oraz  $|\{f_j : j \in J\}| = |\{\kappa(f_j) : j \in J\}|$ .

*Dowód.* Bez trudu sprawdzamy, że  $M/IM$  jest lewym  $R/I$ -modułem z mnożeniem zdefiniowanym jako

$$(r + I)(m + IM) = rm + IM, \text{ dla } r + I \in R/I, m + IM \in M/IM.$$

Ustalmy  $m + IM \in M/IM$ . Wówczas  $m = r_1 f_1 + \dots + r_n f_n$ , dla pewnych  $r_i \in R$ ,  $f_i \in \{f_j : j \in J\}$ . Stąd:

$$\begin{aligned} m + IM &= (r_1 f_1 + \dots + r_n f_n) + IM \\ &= (r_1 f_1 + IM) + \dots + (r_n f_n + IM) \\ &= (r_1 + I)(f_1 + IM) + \dots + (r_n + I)(f_n + IM) \\ &= (r_1 + I)\kappa(f_1) + \dots + (r_n + I)\kappa(f_n). \end{aligned}$$

Wobec tego zbiór  $\{\kappa(f_j) : j \in J\}$  generuje  $M/IM$ .

Założmy, że  $(r_1 + I)\kappa(f_1) + \dots + (r_m + I)\kappa(f_m) = 0$  dla pewnych  $r_i \in R$ ,  $f_i \in \{f_j : j \in J\}$ . Wówczas:

$$0 = \sum_{i=1}^m (r_i + I)\kappa(f_i) = \sum_{i=1}^m (r_i + I)(f_i + IM) = \sum_{i=1}^m r_i f_i + IM,$$

skąd  $\sum_{i=1}^m r_i f_i \in IM$ . Zatem  $\sum_{i=1}^m r_i f_i = \sum_{j=1}^k s_j g_j$ , dla pewnych  $s_j \in I$ ,  $g_j \in M$ . Ponieważ każdy  $g_j$  jest kombinacją  $\{f_j : j \in J\}$  oraz  $I$  jest ideałem,  $\sum_{j=1}^k s_j g_j$  jest kombinacją elementów zbioru  $\{f_j : j \in J\}$  ze współczynnikami z  $I$ :

$$\sum_{i=1}^m r_i f_i = \sum_{j=1}^k s_j g_j = \sum_{l=1}^d c_l h_l, \text{ dla pewnych } c_l \in I, h_l \in \{f_j : j \in J\}.$$

Stąd  $m = d$ ,  $r_i = c_i$ ,  $f_i = h_i$ , a więc  $r_i + I = 0$  w  $R/I$  dla  $i \in \{1, \dots, m\}$ , czyli  $\{\kappa(f_j) : j \in J\}$  jest liniowo niezależny nad  $R/I$ .

Niech  $f_i, f_j \in \{f_j : j \in J\}$  oraz niech  $\kappa(f_i) = \kappa(f_j)$ . Wówczas

$$(1_R + I)\kappa(f_i) - (1_R + I)\kappa(f_j) = 0.$$

Gdyby  $f_i \neq f_j$ , to wówczas  $1_R \in I$ , co byłoby sprzecznością. Zatem  $f_i = f_j$  i  $\kappa$  jest różnowartościowe.  $\square$

**Twierdzenie 10.4.** *Niech  $R$  i  $S$  będą pierścieniami z jedyneką, niech  $f : R \rightarrow S$  będzie epimorfizmem. Jeśli  $S$  ma własność niezmiennika bazowego, to  $R$  również ma własność niezmiennika bazowego.*

*Dowód.* Niech  $I = \ker f$ . Wówczas oczywiście  $R/I \cong S$ . Niech  $M$  będzie lewym  $R$ -modułem wolnym a  $\{f_i : i \in I\}$  oraz  $\{g_j : j \in J\}$  jego bazami. Niech  $\kappa : M \rightarrow M/IM$  oznacza epimorfizm kanoniczny. Wobec poprzedniego lematu  $M/IM$  jest  $R/I$ -modułem wolnym z bazami  $\{\kappa(f_i) : i \in I\}$  oraz  $\{\kappa(g_j) : j \in J\}$ . Ponieważ  $R/I \cong S$ , więc  $|\{\kappa(f_i) : i \in I\}| = |\{\kappa(g_j) : j \in J\}|$ , skąd  $|\{f_i : i \in I\}| = |\{g_j : j \in J\}|$ .  $\square$

**Przykłady:**

- (5) Niech  $R$  będzie pierścieniem przemiennym z jedyneką. Wówczas  $R$  ma własność niezmiennika bazowego; faktycznie, (0) można rozszerzyć do ideału maksymalnego  $I$ , a zatem  $R/I$  jest ciałem, w szczególności zaś pierścieniem z dzieleniem oraz  $\kappa : R \rightarrow R/I$  jest surjekcją.
- (6) Niech  $R$  będzie pierścieniem lokalnym z jedyneką. Wówczas  $R$  ma własność niezmiennika bazowego; faktycznie,  $R$  ma dokładnie jeden lewy ideał maksymalny  $I$ , a zatem – naśladując dowód twierdzenia, orzekającego, iż pierścień ilorazowy pierścienia przemiennego z jedyneką modulo ideał maksymalny jest ciałem – stwierdzamy, że  $R/I$  jest pierścieniem z dzieleniem oraz  $\kappa : R \rightarrow R/I$  jest surjekcją.
- (7) Niech  $R$  będzie pierścieniem skończonym. Wówczas  $R$  ma własność niezmiennika bazowego; faktycznie,  $R^m \cong R^n$  pociąga  $|R^m| = |R^n|$ .

**Twierdzenie 10.5** (własność uniwersalna modułów wolnych). *Niech  $R$  będzie pierścieniem z jedyneką. Niech  $M$  będzie lewym unitarnym  $R$ -modułem. Wówczas  $M$  jest modułem wolnym o bazie  $\{f_i : i \in I\}$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego lewego unitarnego  $R$ -modułu  $N$  i jego rodziny elementów  $\{h_i : i \in I\}$  istnieje dokładnie jeden homomorfizm  $h : M \rightarrow N$  taki, że  $h(f_i) = h_i$ .*

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup i pozostawiamy go czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

**Twierdzenie 10.6.** *Niech  $R$  będzie pierścieniem, niech  $K$  będzie lewym  $R$ -modułem. Wówczas  $K$  jest homomorficznym obrazem pewnego lewego  $R$  modułu  $M$  o następującej własności:*

*istnieje podzbiór  $\{f_i : i \in I\}$  zbioru  $M$  taki, że dla każdego lewego  $R$ -modułu  $N$  i jego rodziny elementów  $\{h_i : i \in I\}$  istnieje dokładnie jeden homomorfizm  $h : M \rightarrow N$  taki, że  $h(f_i) = h_i$ .*

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup i pozostawiamy go czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

**Wniosek 10.2.** *Niech  $R$  będzie pierścieniem z jedyneką. Każdy lewy unitarny  $R$ -moduł jest homomorficznym obrazem pewnego  $R$ -modułu wolnego.*

Okazuje się, że moduły wolne nie są zamknięte na branie podmodułów:

**Przykład:**

- (8) Niech  $F$  będzie ciałem, niech  $J = (x, y) \triangleleft F[x, y]$ . Wówczas  $F[x, y]$  jest  $F$ -modułem wolnym, a  $J$  jego podmodułem, który nie jest wolny.

**Twierdzenie 10.7.** *Niech  $R$  będzie pierścieniem, niech  $M_3$  będzie lewym  $R$ -modułem o następującej własności:*

*istnieje podzbiór  $\{f_i : i \in I\}$  zbioru  $M_3$  taki, że dla każdego lewego  $R$ -modułu  $N$  i jego rodziny elementów  $\{h_i : i \in I\}$  istnieje dokładnie jeden homomorfizm  $h : M_3 \rightarrow N$  taki, że  $h(f_i) = h_i$ .*

Wówczas ciąg dokładny

$$0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$$

jest rozszczepialny.

*Dowód.* Niech  $\{f_i : i \in I\}$  będzie takim podzbiorem zbioru  $M_3$ , że dla każdego lewego  $R$ -modułu  $N$  i jego rodziny elementów  $\{h_i : i \in I\}$  istnieje dokładnie jeden homomorfizm  $h : M_3 \rightarrow N$  taki, że  $h(f_i) = h_i$ . Zauważmy, iż  $\{f_i : i \in I\}$  jest zbiorem generatorów  $M_3$ : gdyby istniał  $m \in M_3 \setminus \langle \{f_i : i \in I\} \rangle$ , to wówczas  $id_{M_3}$  oraz  $\xi : M_3 \rightarrow M_3$  dane wzorem

$$\xi(m_3) = \begin{cases} m_3, & \text{gdy } m_3 \in \langle \{f_i : i \in I\} \rangle \\ 0, & \text{gdy } m_3 \notin \langle \{f_i : i \in I\} \rangle \end{cases}$$

byłyby dwoma różnymi homomorfizmami modułu  $M_3$  w samego siebie przeprowadzającymi  $\{f_i : i \in I\}$  na  $\{f_i : i \in I\}$ .

Ponieważ  $g$  jest surjekcją, dla każdego  $i \in I$  istnieje  $a_i \in M_2$  taki, że  $g(a_i) = f_i$ . Wobec własności modułu  $M_3$ , istnieje homomorfizm  $\phi : M_3 \rightarrow M_2$  taki, że  $\phi(f_i) = a_i$ . Oczywiście  $g \circ \phi(f_i) = f_i$  i ponieważ  $\{f_i : i \in I\}$  generuje  $M_3$ , więc  $g \circ \phi = id_{M_3}$ . Tym samym ciąg jest rozszczepialny.  $\square$

**Wniosek 10.3.** Niech  $R$  będzie pierścieniem z jedyneką, niech  $M_3$  będzie lewym  $R$ -modułem wolnym. Wówczas ciąg dokładny lewych  $R$ -modułów unitarnych i ich homomorfizmów

$$0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$$

jest rozszczepialny.

**Wniosek 10.4** (twierdzenie o składniku prostym). Niech  $R$  będzie pierścieniem, niech  $K$  będzie lewym  $R$ -modułem.

(1) Niech  $M$  będzie lewym  $R$ -modułem o następującej własności:

istnieje podzbiór  $\{f_i : i \in I\}$  zbioru  $M$  taki, że dla każdego lewego  $R$ -modułu  $N$  i jego rodziny elementów  $\{h_i : i \in I\}$  istnieje dokładnie jeden homomorfizm  $h : M \rightarrow N$  taki, że  $h(f_i) = h_i$ ,

niech  $h : K \rightarrow M$  będzie homomorfizmem surjektywnym. Wówczas istnieje podmoduł  $M' < K$  taki, że

$$M \cong M' \text{ oraz } K = M' \oplus \ker h.$$

(2) Niech  $L$  będzie podmodułem modułu  $K$  a  $K/L$  lewym  $R$ -modułem o następującej własności:

istnieje podzbiór  $\{f'_i + L : i \in I\}$  zbioru  $K/L$  taki, że dla każdego lewego  $R$ -modułu  $N$  i jego rodziny elementów  $\{h_i : i \in I\}$  istnieje dokładnie jeden homomorfizm  $h : K/L \rightarrow N$  taki, że  $h(f'_i + L) = h_i$

Wówczas istnieje podmoduł  $K' < K$  o następującej własności:

istnieje podzbiór  $\{f''_i : i \in I\}$  zbioru  $K'$  taki, że dla każdego lewego  $R$ -modułu  $N$  i jego rodziny elementów  $\{h_i : i \in I\}$  istnieje dokładnie jeden homomorfizm  $h : K' \rightarrow N$  taki, że  $h(f''_i) = h_i$ ,

oraz  $K = K' \oplus L$ .

*Dowód.* Dla dowodu pierwszej części wystarczy zauważyć, że ciąg

$$K \xrightarrow{h} M \rightarrow 0$$

jest rozszczepialny. Druga część wynika z pierwszej podobnie, jak analogiczny rezultat dla grup.  $\square$

**Wniosek 10.5** (twierdzenie o składniku prostym dla modułów unitarnych). *Niech  $R$  będzie pierścieniem z jedynką, niech  $K$  będzie lewym unitarnym  $R$ -modułem.*

- (1) *Niech  $M$  będzie lewym  $R$ -modułem wolnym, niech  $h : K \rightarrow M$  będzie homomorfizmem surjektywnym. Wówczas istnieje podmoduł  $M' < K$  taki, że*

$$M \cong M' \text{ oraz } K = M' \oplus \ker h.$$

- (2) *Niech  $L$  będzie podmodulem modułu  $K$  a  $K/L$  lewym  $R$ -modułem wolnym. Wówczas istnieje podmoduł  $K' < K$  taki, że*

$$K' \text{ jest wolny oraz } K = K' \oplus L.$$

**Twierdzenie 10.8.** *Niech  $R$  będzie pierścieniem, niech  $M$  będzie lewym  $R$ -modułem o następującej własności:*

*istnieje podzbiór  $\{f_i : i \in I\}$  zbioru  $M$  taki, że dla każdego lewego  $R$ -modułu  $N$  i jego rodziny elementów  $\{h_i : i \in I\}$  istnieje dokładnie jeden homomorfizm  $h : M \rightarrow N$  taki, że  $h(f_i) = h_i$ ,*

*niech  $K$  będzie lewym  $R$ -modułem, niech  $h : M \rightarrow K$  będzie homomorfizmem. Wówczas dla każdego lewego  $R$ -modułu  $L$  i dla każdego epimorfizmu  $g : L \rightarrow K$  istnieje homomorfizm  $f : M \rightarrow L$  taki, że  $h = g \circ f$ .*

*Dowód.* Rozważmy diagram:

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ & \downarrow h & \\ L & \xrightarrow{g} & K \longrightarrow 0 \end{array}$$

Ponieważ  $g$  jest surjekcją, więc ciąg  $L \xrightarrow{g} K \rightarrow 0$  jest dokładny. Niech  $\{f_i : i \in I\}$  będzie takim podzbiorem zbioru  $M$ , że dla każdego lewego  $R$ -modułu  $N$  i jego rodziny elementów  $\{h_i : i \in I\}$  istnieje dokładnie jeden homomorfizm  $h : M \rightarrow N$  taki, że  $h(f_i) = h_i$ . Tak jak w poprzednich dowodach zauważamy, że  $\{f_i : i \in I\}$  jest zbiorem generatorów  $M$ . Dla każdego  $i \in I$  istnieje  $a_i \in L$  taki, że  $h(f_i) = g(a_i)$ . Wobec własności modułu  $M$ , istnieje homomorfizm  $f : M \rightarrow L$  taki, że  $f(f_i) = a_i$ ,  $i \in I$ . Ponadto  $g(f(f_i)) = h(f_i)$ ,  $i \in I$ , więc  $h = g \circ f$ .  $\square$

**Wniosek 10.6.** *Niech  $R$  będzie pierścieniem z jedynką, niech  $M$  będzie lewym  $R$ -modułem wolnym, niech  $K$  będzie lewym unitarnym  $R$ -modułem, niech  $h : M \rightarrow K$  będzie homomorfizmem. Wówczas dla każdego lewego unitarnego  $R$ -modułu  $L$  i dla każdego epimorfizmu  $g : L \rightarrow K$  istnieje homomorfizm  $f : M \rightarrow L$  taki, że  $h = g \circ f$ .*