

9. WYKŁAD 9: PRODUKTY I KOPRODUKTY MODUŁÓW. ROZSZCZEPIALNE CIĄGI DOKŁADNE

Definicja i uwaga 9.1. Niech R będzie pierścieniem, niech $\{M_i : i \in I\}$ będzie rodziną (możliwie nieskończoną) lewych R -modułów, niech $\prod_{i \in I} M_i$ będzie produktem rodziny grup abelowych $\{M_i : i \in I\}$. Jeżeli $a \in R$ oraz $m \in \prod_{i \in I} M_i$, to iloczyn $a \cdot m$ definiujemy jako funkcję $a \cdot m : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} M_i$ daną wzorem

$$a \cdot m(i) = am(i).$$

$(\prod_{i \in I} M_i, \cdot)$ jest lewym R -modulem, który nazywamy **produktem modułów**.

Ponadto definiujemy odwzorowania $\pi_i : \prod_{i \in I} M_i \rightarrow M_i$ wzorem

$$\pi_i(m) = m(i),$$

dla $i \in I$. π_i , $i \in I$, są dobrze określonymi epimorfizmami modułów, które nazywamy **epimorfizmami kanonicznymi**.

Dowód powyższej uwagi pozostawiamy czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Definicja i uwaga 9.2. Niech R będzie pierścieniem, niech $\{M_i : i \in I\}$ będzie rodziną (możliwie nieskończoną) lewych R -modułów, niech $\sum_{i \in I} M_i$ będzie koproduktem rodziny grup abelowych $\{M_i : i \in I\}$. Jeżeli $a \in R$ oraz $m \in \sum_{i \in I} M_i$, to iloczyn $a \cdot m$ definiujemy jako funkcję $a \cdot m : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} M_i$ daną wzorem

$$a \cdot m(i) = am(i).$$

$(\sum_{i \in I} M_i, \cdot)$ jest lewym R -modulem, który nazywamy **koproduktem (lub sumą) modułów**.

Ponadto definiujemy odwzorowania $\iota_i : M_i \rightarrow \sum_{i \in I}^w M_i$ wzorem

$$\iota_i(m) = \overline{m}, \text{ gdzie } \overline{m}(j) = \begin{cases} m, & \text{gdy } j = i, \\ 0_{M_j}, & \text{gdy } j \neq i, \end{cases}$$

dla $i \in I$. ι_i , $i \in I$, są dobrze określonymi monomorfizmami modułów, które nazywamy **monomorfizmami kanonicznymi**.

Dowód powyższej uwagi pozostawiamy czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Twierdzenie 9.1. Niech R będzie pierścieniem, niech $\{M_i : i \in I\}$ będzie rodziną lewych R -modułów, N pewnym lewym R -modulem, niech $\{\phi_i : N \rightarrow M_i : i \in I\}$ będzie rodziną homomorfizmów modułów. Wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\phi : N \rightarrow \prod_{i \in I} M_i$ taki, że

$$\pi_i \circ \phi = \phi_i,$$

dla $i \in I$. Innymi słowy, następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\phi} & \prod_{i \in I} M_i \\ & \searrow \phi_i & \downarrow \pi_i \\ & & M_i \end{array}$$

Ponadto jeśli moduł M ma powyższą własność, to wówczas $M \cong \prod_{i \in I} M_i$.

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup i pozostawiamy go czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Twierdzenie 9.2. Niech R będzie pierścieniem, niech $\{M_i : i \in I\}$ będzie rodziną lewych R -modułów, N pewnym lewym R -modulem, niech $\{\phi_i : M_i \rightarrow N : i \in I\}$ będzie rodziną homomorfizmów modułów. Wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\phi : \sum_{i \in I} M_i \rightarrow N$ taki, że

$$\phi \circ \iota_i = \phi_i,$$

dla $i \in I$. Innymi słowy, następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} \sum_{i \in I} M_i & \xrightarrow{\phi} & N \\ \uparrow \iota_i & \nearrow \phi_i & \\ M_i & & \end{array}$$

Ponadto jeśli moduł M ma powyższą własność, to wówczas $M \cong \sum_{i \in I} M_i$.

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup i pozostawiamy go czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Uwaga 9.1. Niech R będzie pierścieniem, niech $\{M_i : i \in \{1, \dots, n\}\}$ będzie skończoną rodziną lewych R -modułów. Wówczas $\prod_{i=1}^n M_i \cong \sum_{i=1}^n M_i$ i stosujemy oznaczenie $M_1 \oplus \dots \oplus M_n$.

Definicja 9.1. Niech R będzie pierścieniem, M lewym R -modulem. Podmoduł N modułu M nazywamy **składnikiem prostym**, jeżeli $M = N \oplus K$ dla pewnego podmodułu K .

Ciąg dokładny

$$0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$$

nazywamy **ciągami rozszczepialnymi**, gdy podmoduł $\text{im } f$ jest składnikiem prostym M_2 .

Twierdzenie 9.3. Niech R będzie pierścieniem, niech ciąg

$$0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$$

będzie dokładny. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- (1) ciąg $0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$ jest rozszczepialny,
- (2) istnieje homomorfizm $\bar{f} : M_2 \rightarrow M_1$ taki, że $\bar{f} \circ f = \text{id}_{M_1}$,
- (3) istnieje homomorfizm $\bar{g} : M_3 \rightarrow M_2$ taki, że $g \circ \bar{g} = \text{id}_{M_2}$.

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2): załóżmy, że $M_2 = \text{im } f \oplus N_2$ dla pewnego podmodułu N_2 . Wówczas, ponieważ f jest różnowartościowy, dowolny $m_2 \in M_2$ można jednoznacznie przedstawić w postaci

$$m_2 = f(m_1) + n_2, \text{ dla pewnych } m_1 \in M_1, n_2 \in N_2.$$

Zdefiniujmy odwzorowanie $\bar{f} : M_2 \rightarrow M_1$ wzorem $\bar{f}(f(m_1) + n_2) = m_1$. Bez trudu sprawdzamy, że $\bar{f}$ jest homomorfizmem. Ponadto $\bar{f} \circ f(m_1) = \bar{f}(f(m_1)) = m_1$.

(2) $\Rightarrow$ (3): załóżmy, że $\bar{f} : M_2 \rightarrow M_1$ jest takim homomorfizmem, że $\bar{f} \circ f = \text{id}_{M_1}$. Odwzorowanie $\text{id}_{M_2} - f \circ \bar{f} : M_2 \rightarrow M_2$ jest homomorfizmem. Ponadto:

$$(\text{id}_{M_2} - f \circ \bar{f}) \circ f = f - f \circ \bar{f} \circ f = f - f = 0_{M_2}$$

i tym samym diagram

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{\bar{f}} & M_2 & \xrightarrow{g} & M_3 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow 0 & & \downarrow id_{M_2} - f \circ \bar{f} & & \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M_2 & \xrightarrow{id_{M_2}} & M_2 \longrightarrow 0 \end{array}$$

jest przemieniczny, a jego wiersze są ciągami dokładnymi. Wobec Twierdzenia 8.2 istnieje homomorfizm $\bar{g} : M_3 \rightarrow M_2$ taki, że $\bar{g} \circ g = id_{M_2} \circ (id_{M_2} - f \circ \bar{f})$. Zatem $g \circ \bar{g} \circ g = g - g \circ f \circ \bar{f} = g$, gdyż ciąg $0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$ jest dokładny i stąd $g \circ f = 0_{M_3}$. Skoro zaś g jest epimorfizmem, to $g \circ \bar{g} = id_{M_2}$.

(3) $\Rightarrow$ (1): załóżmy, że $\bar{g} : M_3 \rightarrow M_2$ jest takim homomorfizmem, że $g \circ \bar{g} = id_{M_2}$. Wówczas dla $m_2 \in M_2$ mamy:

$$g(m_2 - \bar{g}(g(m_2))) = g(m_2) - g(m_2) = 0_{M_3}$$

zatem $m_2 - \bar{g}(g(m_2)) \in \ker g = \operatorname{im} f$. Wobec tego $M_2 = \operatorname{im} f + \operatorname{im} \bar{g}$. Ustalmy $m_2 \in \operatorname{im} f \cap \operatorname{im} \bar{g}$. Wtedy $m_2 = f(m_1) = \bar{g}(m_3)$ dla pewnych $m_1 \in M_1$, $m_3 \in M_3$. Wobec tego $g(m_2) = g(\bar{g}(m_3)) = g(f(m_1))$. Ale $g(\bar{g}(m_3)) = m_3$ oraz $g \circ f = 0_{M_3}$, więc $m_3 = 0$. Stąd $m_2 = 0$, a zatem $M_2 = \operatorname{im} f \oplus \operatorname{im} \bar{g}$. $\square$

Twierdzenie 9.4. Niech R będzie pierścieniem. Ciąg

$$0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$$

jest rozszczepialnym ciągiem dokładnym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją homomorfizmy $\bar{f} : M_2 \rightarrow M_1$ oraz $\bar{g} : M_3 \rightarrow M_2$ takie, że

- (1) $\bar{f} \circ f = id_{M_1}$, $g \circ \bar{g} = id_{M_3}$,
- (2) $g \circ f = 0_{M_3}$, $\bar{f} \circ \bar{g} = 0_{M_1}$,
- (3) $f \circ \bar{f} + \bar{g} \circ g = id_{M_2}$.

Dowód. ($\Rightarrow$): załóżmy, że $0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$ jest rozszczepialnym ciągiem dokładnym. Wobec tego $g \circ f = 0_{M_3}$. Wobec Twierdzenia 9.3 istnieją $\bar{f} : M_2 \rightarrow M_1$ oraz $\bar{g} : M_3 \rightarrow M_2$ takie, że spełniony jest warunek (1) twierdzenia. Z dowodu implikacji (2) $\Rightarrow$ (3) Twierdzenia 9.3 wynika, że $g \circ \bar{g} \circ g = g - g \circ f \circ \bar{f}$, więc $g = g \circ (f \circ \bar{f} + \bar{g} \circ g)$ i skoro g jest surjekcją, to spełniony jest warunek (3). Wobec tego:

$$\bar{f} = \bar{f} \circ id_{M_2} = \bar{f} \circ (f \circ \bar{f} + \bar{g} \circ g) = \bar{f} + \bar{f} \circ \bar{g} \circ g,$$

więc $\bar{f} \circ \bar{g} \circ g = 0$. Jednak ponieważ g jest surjekcją, więc $\bar{f} \circ \bar{g} = 0_{M_1}$.

($\Leftarrow$): załóżmy, że istnieją homomorfizmy $\bar{f} : M_2 \rightarrow M_1$ oraz $\bar{g} : M_3 \rightarrow M_2$ takie, że spełnione są warunki (1) – (3). Wobec warunku (1) f jest monomorfizmem, a g jest epimorfizmem. Ponieważ $g \circ f = 0_{M_3}$, więc $\ker g \supset \operatorname{im} f$. Ponadto, gdy $m_2 \in \ker g$, to wobec warunku (3):

$$m_2 = f(\bar{f}(m_2)) + \bar{g}(g(m_2)) = f \circ \bar{f}(m_2),$$

więc $m_2 \in \operatorname{im} f$ i tym samym $\ker g = \operatorname{im} f$. Zatem ciąg

$$0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$$

jest dokładny i rozszczepialny na podstawie Twierdzenia 9.3. $\square$

Wniosek 9.1. Niech R będzie pierścieniem, $M, M_1, \dots, M_n$ lewymi R -modułami. Wówczas $M \cong M_1 \oplus \dots \oplus M_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją homomorfizmy $f_i : M_i \rightarrow M$ oraz $g_i : M \rightarrow M_i$ takie, że

- (1) $g_i \circ f_i = id_{M_i}$, dla $i \in \{1, \dots, n\}$,

- (2) $g_i \circ f_j = 0_{M_i}$, dla $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$,
 (3) $f_1 \circ g_1 + \dots + f_n \circ g_n = id_M$.

Dowód. ($\Rightarrow$): załóżmy, że $M \cong M_1 \oplus \dots \oplus M_n$. Bez trudu sprawdzamy, że odwzorowania $f_i : M_i \rightarrow M$ dane wzorem

$$f_i(m_i) = m_i, \text{ dla } m_i \in M_i, i \in \{1, \dots, n\},$$

oraz $g_i : M \rightarrow M_i$ dane wzorem

$$g_i(m_1 + \dots + m_i + \dots + m_n) = m_i, \text{ dla } m = m_1 + \dots + m_i + \dots + m_n \in M, i \in \{1, \dots, n\},$$

spełniają warunki (1) – (3).

($\Leftarrow$): załóżmy, że istnieją homomorfizmy $f_i : M_i \rightarrow M$ oraz $g_i : M \rightarrow M_i$ spełniające warunki (1) – (3). Dla ustalonego $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ rozważmy ciąg

$$0 \rightarrow M_{i_0} \xrightarrow{f_{i_0}} M \xrightarrow{g_1 + \dots + g_{i_0-1} + g_{i_0+1} + \dots + g_n} M_1 \oplus \dots \oplus M_{i_0-1} \oplus M_{i_0+1} \oplus \dots \oplus M_n \rightarrow 0$$

oraz odwzorowanie $f_1 + \dots + f_{i_0-1} + f_{i_0+1} + \dots + f_n : M_1 \oplus \dots \oplus M_{i_0-1} \oplus M_{i_0+1} \oplus \dots \oplus M_n \rightarrow M$. Wobec założeń, $g_{i_0} \circ f_{i_0} = id_{M_{i_0}}$. Ponadto

$$\begin{aligned} & (g_1 + \dots + g_{i_0-1} + g_{i_0+1} + \dots + g_n) \circ (f_1 + \dots + f_{i_0-1} + f_{i_0+1} + \dots + f_n) \\ & \quad (m_1 + \dots + m_{i_0-1} + m_{i_0+1} + \dots + m_n) \\ &= g_1 \circ f_1(m_1) + \dots + g_{i_0-1} \circ f_{i_0-1}(m_{i_0-1}) + g_{i_0+1} \circ f_{i_0+1}(m_{i_0+1}) + \dots + g_n \circ f_n(m_n) \\ &= m_1 + \dots + m_{i_0-1} + m_{i_0+1} + \dots + m_n. \end{aligned}$$

Wobec założenia, $g_{i_0} \circ (f_1 + \dots + f_{i_0-1} + f_{i_0+1} + \dots + f_n) = 0_{M_{i_0}}$. Ponadto

$$(g_1 + \dots + g_{i_0-1} + g_{i_0+1} + \dots + g_n) \circ f_{i_0} = 0_{M_1 \oplus \dots \oplus M_{i_0-1} \oplus M_{i_0+1} \oplus \dots \oplus M_n}.$$

Na koniec

$$f_{i_0} \circ g_{i_0} + (f_1 + \dots + f_{i_0-1} + f_{i_0+1} + \dots + f_n) \circ (g_1 + \dots + g_{i_0-1} + g_{i_0+1} + \dots + g_n) = id_M.$$

Wobec Twierdzenia 9.3 omawiany ciąg jest rozszczepialnym ciągiem dokładnym, a więc $f_{i_0}(M_{i_0})$ jest składnikiem prostym M . Ponieważ $g_{i_0} \circ f_{i_0} = id_{M_{i_0}}$, więc f_{i_0} jest injekcją. Tym samym $M_1 \oplus \dots \oplus M_n \cong f_1(M_1) \oplus \dots \oplus f_n(M_n) = M$. $\square$

Wniosek 9.2. Niech R będzie pierścieniem, M lewym R -modułem, N podmodułem modułu N , a $\kappa : M \rightarrow M/N$ epimorfizmem kanonicznym danym wzorem

$$\kappa(m) = m + N.$$

Wówczas N jest składnikiem prostym M wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje homomorfizm $h : M/N \rightarrow M$ taki, że $\kappa \circ h = id_{M/N}$.

Dowód. Wobec Twierdzenia 9.3 moduł $N = \text{im } id_N$ jest składnikiem prostym M wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg dokładny

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{id_N} M \xrightarrow{\kappa} M/N \rightarrow 0$$

jest rozszczepialny, a więc gdy istnieje homomorfizm $h : M/N \rightarrow M$ taki, że $\kappa \circ h = id_{M/N}$. $\square$