

8. WYKŁAD 8: CIĄGI DOKŁADNE.

Definicja 8.1. Niech R będzie pierścieniem. Ciąg lewych R -modułów i homomorfizmów:

$$\dots \rightarrow M_{i-1} \xrightarrow{g_{i-1}} M_i \xrightarrow{g_i} M_{i+1} \rightarrow \dots$$

nazywamy **ciągami dokładnymi w członie M_i** , jeśli $\operatorname{im} g_{i-1} = \ker g_i$. Ciąg nazywamy **ciągami dokładnymi**, gdy jest dokładny w każdym członie.

Uwaga 8.1. Niech R będzie pierścieniem, M_1, M_2, M_3 lewymi R -modułami. Wówczas:

- (1) $0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2$ jest dokładny wtedy i tylko wtedy, gdy f jest różnowartościowy;
- (2) $M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$ jest dokładny wtedy i tylko wtedy, gdy g jest surjektywny;
- (3) $0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$ jest dokładny wtedy i tylko wtedy, gdy f jest różnowartościowy, g jest surjektywny i $\ker g = \operatorname{im} f$, przy czym ostatni warunek można zastąpić warunkiem orzekającym, że g indukuje izomorfizm $M_2/\operatorname{im} f \cong M_3$.

Uwaga 8.2. Niech R będzie pierścieniem, M, N lewymi R -modułami. Wówczas $\operatorname{Hom}_R(M, N)$ jest grupą przemienną.

Twierdzenie 8.1. Niech R będzie pierścieniem.

- (1) Ciąg lewych R -modułów i homomorfizmów

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$$

jest dokładny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego lewego R -modułu N ciąg:

$$0 \rightarrow \operatorname{Hom}_R(M_3, N) \xrightarrow{\bar{g}} \operatorname{Hom}_R(M_2, N) \xrightarrow{\bar{f}} \operatorname{Hom}_R(M_1, N)$$

jest ciągiem dokładnym grup abelowych, gdzie odwzorowania $\bar{g} : \operatorname{Hom}_R(M_3, N) \rightarrow \operatorname{Hom}_R(M_2, N)$ i $\bar{f} : \operatorname{Hom}_R(M_2, N) \rightarrow \operatorname{Hom}_R(M_1, N)$ dane są wzorami

$$\bar{g}(\phi) = \phi \circ g \text{ oraz } \bar{f}(\psi) = \psi \circ f.$$

- (2) Ciąg lewych R -modułów i homomorfizmów

$$0 \rightarrow N_1 \xrightarrow{f} N_2 \xrightarrow{g} N_3$$

jest dokładny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego lewego R -modułu M ciąg:

$$\operatorname{Hom}_R(M, N_1) \xrightarrow{\bar{f}} \operatorname{Hom}_R(M, N_2) \xrightarrow{\bar{g}} \operatorname{Hom}_R(M, N_3) \rightarrow 0$$

jest ciągiem dokładnym grup abelowych, gdzie odwzorowania $\bar{f} : \operatorname{Hom}_R(M, N_1) \rightarrow \operatorname{Hom}_R(M, N_2)$ i $\bar{g} : \operatorname{Hom}_R(M, N_2) \rightarrow \operatorname{Hom}_R(M, N_3)$ dane są wzorami

$$\bar{f}(\phi) = f \circ \phi \text{ oraz } \bar{g}(\psi) = g \circ \psi.$$

Dowód. (1) ($\Rightarrow$): Jeżeli ciąg $M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$ jest dokładny, to g jest surjektywny oraz $\operatorname{im} f = \ker g$. Ustalmy lewy R -moduł N .

Pokażemy, że $\bar{g}$ jest różnowartościowy. Załóżmy, że dla pewnych $\phi_1, \phi_2 \in \operatorname{Hom}_R(M_3, N)$ zachodzi $\bar{g}(\phi_1) = \bar{g}(\phi_2)$. Wówczas

$$\phi_1 \circ g = \phi_2 \circ g.$$

Ponieważ g jest surjektywny, a więc jest epimorfizmem kategorijskim, więc $\phi_1 = \phi_2$.

Pokażemy, że $\text{im } \bar{g} = \ker \bar{f}$. Dla dowodu inkluzji ($\subset$) ustalmy $\psi \in \text{im } \bar{g}$. Wówczas $\psi = \bar{g}(\phi) = \phi \circ g$ dla pewnego $\phi \in \text{Hom}_R(M_3, N)$. Wówczas $\bar{f}(\psi)(m_1) = \bar{f}(\phi \circ g)(m_1) = \phi \circ g \circ f(m_1) = \phi(0) = 0$, dla dowolnego $m_1 \in M_1$, zatem $\psi \in \ker \bar{f}$.

Dla dowodu inkluzji ($\supset$) ustalmy $\psi \in \ker \bar{f}$. Wówczas $\psi : M_2 \rightarrow N$ jest takim homomorfizmem, że $\bar{f}(\psi) = \psi \circ f = 0$. Zatem $\psi(m_2) = 0$ dla $m_2 \in \text{im } f$, więc $\text{im } f \subset \ker \psi$. Wobec Wniosku 7.3 istnieje dokładnie jeden homomorfizm $u : M_2/\text{im } f \rightarrow N$ taki, że $\psi = u \circ \kappa$, gdzie $\kappa : M_2 \rightarrow M_2/\text{im } f$ jest homomorfizmem kanonicznym:

$$\begin{array}{ccc} & M_2 & \\ \swarrow \kappa & & \searrow \psi \\ M_2/\text{im } f & \xrightarrow{\quad u \quad} & N \end{array}$$

Podobnie, ponieważ $g : M_2 \rightarrow M_3$ jest surjekcją oraz $\ker g = \text{im } f$, więc jedyny homomorfizm $v : M_2/\ker g = M_2/\text{im } f \rightarrow M_3$ taki, że $g = v \circ \kappa$ jest izomorfizmem:

$$\begin{array}{ccc} & M_2 & \\ \swarrow \kappa & & \searrow g \\ M_2/\text{im } f & \xrightarrow{\quad v \quad} & M_3 \end{array}$$

W szczególności v jest odwracalny, więc $\kappa = v^{-1} \circ g$. Stąd $\psi = u \circ \kappa = u \circ v^{-1} \circ g = \bar{g}(u \circ v^{-1}) \in \text{im } \bar{g}$.

($\Leftarrow$): Jeżeli $0 \rightarrow \text{Hom}_R(M_3, N) \xrightarrow{\bar{g}} \text{Hom}_R(M_2, N) \xrightarrow{\bar{f}} \text{Hom}_R(M_1, N)$ jest ciągiem dokładnym grup abelowych dla wszystkich N , to $\bar{g}$ jest różnowartościowy oraz $\text{im } \bar{g} = \ker \bar{f}$.

Pokażemy, że g jest surjekcją. Ponieważ $\bar{g}$ jest różnowartościowy, więc jeśli $\phi_1, \phi_2 \in \text{Hom}_R(M_2, N)$ są takimi homomorfizmami, że $\phi_1 \circ g = \phi_2 \circ g$, to $\phi_1 = \phi_2$. Zatem g jest epimorfizmem kategorijskim, a więc surjekcją.

Pokażemy, że $\text{im } f = \ker g$. Dla dowodu inkluzji ($\subset$) weźmy w założeniu $N = M_3$. Ponieważ $\text{im } \bar{g} = \ker \bar{f}$, więc dla $\phi \in \text{Hom}_R(M_3, M_3)$ zachodzi $\bar{f}(\bar{g}(\phi)) = 0$, czyli $\phi \circ g \circ f = 0$. W szczególności $\text{id}_G \circ g \circ f = g \circ f = 0$, więc $\text{im } f \subset \ker g$.

Dla dowodu inkluzji ($\supset$) weźmy w założeniu $N = M_2/\text{im } f$ i niech $\kappa : M_2 \rightarrow M_2/\text{im } f$ będzie epimorfizmem kanonicznym. Wówczas $\bar{f}(\kappa)(m_2) = (\kappa \circ f)(m_2) = f(m_2) + \text{im } f = \text{im } f$, więc $\kappa \in \ker \bar{f} = \text{im } \bar{g}$. Zatem dla pewnego $\phi \in \text{Hom}_R(M_3, M_2/\text{im } f)$ zachodzi $\kappa = \phi \circ g$. Stąd $\text{im } f = \ker \kappa \supset \ker g$.

(2) analogicznie. □

Twierdzenie 8.2. Niech R będzie pierścieniem.

(1) Jeżeli w diagramie przemiennym

$$\begin{array}{ccccccc} M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 & \xrightarrow{g} & M_3 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow u & & \downarrow v & & & & \\ N_1 & \xrightarrow{f'} & N_2 & \xrightarrow{g'} & N_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

wiersze są ciągami dokładnymi, to istnieje dokładnie jeden homomorfizm $w : M_3 \rightarrow N_3$ taki, że diagram

$$\begin{array}{ccccccc} M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 & \xrightarrow{g} & M_3 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \\ N_1 & \xrightarrow{f'} & N_2 & \xrightarrow{g'} & N_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

jest przemienny.

(2) Jeżeli w diagramie przemiennym

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 & \xrightarrow{g} & M_3 \\ & & & & \downarrow v & & \downarrow w \\ 0 & \longrightarrow & N_1 & \xrightarrow{f'} & N_2 & \xrightarrow{g'} & N_3 \end{array}$$

wiersze są ciągami dokładnymi, to istnieje dokładnie jeden homomorfizm $u : M_1 \rightarrow N_1$ taki, że diagram

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 & \xrightarrow{g} & M_3 \\ & & \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w \\ 0 & \longrightarrow & N_1 & \xrightarrow{f'} & N_2 & \xrightarrow{g'} & N_3 \end{array}$$

jest przemienny.

Dowód. (1) Rozważmy diagram

$$\begin{array}{ccc} & M_2 & \\ g \swarrow & & \searrow g' \circ v \\ M_3 & & N_3 \end{array}$$

Pokażemy, że $\ker g \subset \ker g' \circ v$. Istotnie, ustalmy $m_2 \in \ker g = \operatorname{im} f$. Wówczas $m_2 = f(m_1)$. Zatem $v(m_2) = v(f(m_1)) = f'(u(m_1))$. Stąd $g' \circ v(m_2) = g' \circ f'(u(m_1)) = 0$.

Wobec Twierdzenia 7.4 istnieje dokładnie jeden homomorfizm $w : M_3 \rightarrow N_3$ taki, że $w \circ g = g' \circ v$.

(2) analogicznie

□

Twierdzenie 8.3 (lemat o pięciu modułach). Niech R będzie pierścieniem, niech w diagramie przemiennym

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 & \xrightarrow{g} & M_3 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w \\ 0 & \longrightarrow & N_1 & \xrightarrow{f'} & N_2 & \xrightarrow{g'} & N_3 \longrightarrow 0 \end{array}$$

wiersze będą ciągami dokładnymi. Wówczas:

- (1) Jeśli u i w są różnowartościowe, to v jest różnowartościowy.
- (2) Jeśli u i w są surjekcjami, to v jest surjekcją.
- (3) Jeśli u i w są izomorfizmami, to v jest izomorfizmem.

Dowód. (1) Ustalmy $m_2 \in M_2$ i niech $v(m_2) = 0$. Wówczas

$$w \circ g(m_2) = g' \circ v(m_2) = g'(0) = 0.$$

Ponieważ w jest różnowartościowe, $g(m_2) = 0$. Ponieważ $0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$ jest dokładny, więc $\ker g = \operatorname{im} f$, a zatem $m_2 = f(m_1)$ dla pewnego $m_1 \in M_1$. Stąd

$$f' \circ u(m_1) = v \circ f(m_1) = v(m_2) = 0.$$

Ponieważ $0 \rightarrow N_1 \xrightarrow{f'} N_2 \xrightarrow{g'} N_3 \rightarrow 0$ jest dokładny, więc f' jest różnowartościowy, więc $u(m_1) = 0$. Ponieważ u jest różnowartościowy, $m_1 = 0$. Stąd $m_2 = f(m_1) = f(0) = 0$.

(2) analogicznie.

(3) wynika wprost z (1) i (2). □

Definicja 8.2. Niech R będzie pierścieniem, niech M, N będą lewymi R -modułami, niech $\phi : M \rightarrow N$ będzie homomorfizmem modułów. Moduł $N/\operatorname{im} \phi$ nazywamy **kojądrem** homomorfizmu ϕ i oznaczamy $\operatorname{coker} \phi$.

Twierdzenie 8.4 (lemat o węź). Niech R będzie pierścieniem, niech w diagramie przemiennym

$$\begin{array}{ccccccc} M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 & \xrightarrow{g} & M_3 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \\ 0 & \longrightarrow & N_1 & \xrightarrow{f'} & N_2 & \xrightarrow{g'} & N_3 \end{array}$$

wiersze będą ciągami dokładnymi. Wówczas ciąg

$$0 \rightarrow \ker u \xrightarrow{f''} \ker v \xrightarrow{g''} \ker w \xrightarrow{d} \operatorname{coker} u \xrightarrow{\bar{f}'} \operatorname{coker} v \xrightarrow{\bar{g}'} \operatorname{coker} w \rightarrow 0$$

jest dokładny, gdzie $f'' = f|_{\ker u}$, $g'' = g|_{\ker v}$ oraz $\bar{f}'(n_1 + \operatorname{im} u) = f'(n_1) + \operatorname{im} v$, $\bar{g}'(n_2 + \operatorname{im} v) = g'(n_2) + \operatorname{im} w$, a d jest pewnym "homomorfizmem łączącym".

Wyjaśnienie nazwy "lemat o węź" pochodzi od następującego diagramu:

$$\begin{array}{ccccccc} \ker u & \xrightarrow{f''} & \ker v & \xrightarrow{g''} & \ker w & \xrightarrow{\quad} & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 & \xrightarrow{g} & M_3 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \\ 0 & \longrightarrow & N_1 & \xrightarrow{f'} & N_2 & \xrightarrow{g'} & N_3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \operatorname{coker} u & \xrightarrow{\bar{f}'} & \operatorname{coker} v & \xrightarrow{\bar{g}'} & \operatorname{coker} w & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(Diagram showing a commutative diagram with a loop labeled d connecting $\ker w$ to $\operatorname{coker} u$.)

Dowód. Ograniczymy się do zbudowania i sprawdzenia poprawności określenia homomorfizmu łączącego, zweryfikowanie, iż f'' , g'' , $\bar{f}'$ i $\bar{g}'$ są dobrze zdefiniowanymi odwzorowaniami, jak również pokazanie, że stosowny ciąg jest dokładny pozostawiamy Czytelnikowi jako nietrudnie, acz dość techniczne ćwiczenie.

Ponieważ $0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$ jest dokładny, więc g jest surjekcją. Tym samym dla ustalonego $m_3 \in \ker w$, istnieje $m_2 \in M_2$ takie, że $m_3 = g(m_2)$. Ponieważ $w \circ g = g' \circ v$, więc $g' \circ v(m_2) = w \circ g(m_2) = 0$,

a zatem $v(m_2) \in \ker g' = \operatorname{im} f'$. Wobec tego $v(m_2) = f'(n_1)$, dla pewnego $n_1 \in N_1$. Zdefiniujmy odwzorowanie $d : \ker w \rightarrow \operatorname{coker} u = N_1 / \operatorname{im} u$ wzorem

$$d(m_3) = n_3 + \operatorname{im} u.$$

Pokażemy, że d jest dobrze określone. Załóżmy bowiem, że $m_3 = g(m_2) = g(m'_2)$ dla pewnych $m_2, m'_2 \in M_2$. Wówczas $m_2 - m'_2 \in \ker g = \operatorname{im} f$, a więc $m_2 - m'_2 = f(m_1)$ dla pewnego $m_1 \in M_1$. Stąd, jeśli $v(m_2) = f'(n_1)$ i $v(m'_2) = f'(n'_1)$, to

$$f'(n_1) - f'(n'_1) = v(m_2) - v(m'_2) = v(m_2 - m'_2) = v(f(m_1)) = f'(u(m_1)).$$

Skoro f' jest różnowartościowe, to $n_1 - n'_1 = u(m_1)$, a więc $n_1 + \operatorname{im} u = n'_1 + \operatorname{im} u$. □

Definicja 8.3. Niech R będzie pierścieniem, $\mathcal{S}$ klasą lewych R -modułów, G grupą abelową. Funkcję $\lambda : \mathcal{S} \rightarrow G$ nazywamy **addytywną**, gdy dla każdego ciągu dokładnego $0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$, $M_1, M_2, M_3 \in \mathcal{S}$ zachodzi

$$\lambda(M_1) - \lambda(M_2) + \lambda(M_3) = 0$$

Przykład:

- (1) Niech F będzie ciałem, $\mathcal{S}$ klasą skończeniowymiarowych przestrzeni liniowych nad ciałem F . Wówczas funkcja $\lambda : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{Z}$ dana wzorem

$$\lambda(V) = \dim V$$

jest funkcją addytywną.

Uwaga 8.3. Niech R będzie pierścieniem, niech

$$\dots \rightarrow M_{i-1} \xrightarrow{g_{i-1}} M_i \xrightarrow{g_i} M_{i+1} \rightarrow \dots$$

będzie ciągiem dokładnym, niech $\mathcal{S}$ będzie klasą lewych R -modułów zawierającą wszystkie moduły M_i , $\ker g_i$ i $\operatorname{im} g_i$, dla $i \in \mathbb{Z}$, niech G będzie grupą przemienną, a $\lambda : \mathcal{S} \rightarrow G$ funkcją addytywną. Wówczas

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i \lambda(M_i) = 0.$$

Dowód. Podzielmy ciąg $\dots \rightarrow M_{i-1} \xrightarrow{g_{i-1}} M_i \xrightarrow{g_i} M_{i+1} \rightarrow \dots$ na ciągi:

$$0 \rightarrow \ker g_{i-1} \xrightarrow{g_{i-1}} M_i \xrightarrow{g_i} \operatorname{im} g_i \rightarrow 0.$$

Wówczas $\lambda(M_i) = \lambda(\ker g_{i-1}) + \lambda(\operatorname{im} g_i)$. Sumując znakozmiennie otrzymujemy 0. □