

7. WYKŁAD 7: HOMOMORFIZMY MODUŁÓW. MODUŁ ILORAZOWY, TWIERDZENIE O HOMOMORFIZMIE.

Definicja 7.1. Niech R będzie pierścieniem, M, N lewymi R -modułami.

(1) Odwzorowanie $\phi : M \rightarrow N$ nazywamy **homomorfizmem**, jeśli:

- $\forall m_1, m_2 \in M [\phi(m_1 + m_2) = \phi(m_1) + \phi(m_2)],$
- $\forall a \in R \forall m \in M [\phi(am) = a\phi(m)].$

Zbiór wszystkich homomorfizmów modułu M w N oznaczamy $\text{Hom}_R(M, N)$.

(2) Homomorfizm $\phi : M \rightarrow N$ nazywamy **monomorfizmem kategoryjnym modułów**, jeśli dla dowolnych lewego R -modułu K i homomorfizmów $\psi_1, \psi_2 : K \rightarrow M$:

$$\text{jeśli } \phi \circ \psi_1 = \phi \circ \psi_2 \text{ to } \psi_1 = \psi_2.$$

(3) Homomorfizm $\phi : M \rightarrow N$ nazywamy **epimorfizmem kategoryjnym modułów**, jeśli dla dowolnych lewego R -modułu K i homomorfizmów $\psi_1, \psi_2 : N \rightarrow K$:

$$\text{jeśli } \psi_1 \circ \phi = \psi_2 \circ \phi \text{ to } \psi_1 = \psi_2.$$

(4) Homomorfizm $\phi : M \rightarrow N$ nazywamy **izomorfizmem**, jeśli jest różnowartościowy i surjektywny. Dwa moduły M i N nazywamy **izomorficznymi**, jeśli istnieje między nimi izomorfizm, co oznaczamy przez $M \cong N$.

(5) Jeśli $\phi : M \rightarrow N$ jest homomorfizmem, to zbiór $\phi^{-1}(0_N)$ nazywamy **jądrem** i oznaczamy $\ker \phi$, a zbiór $\phi(M)$ **obrazem** i oznaczamy $\text{im } \phi$.

Przykłady:

- (1) Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem F , $\phi : V \rightarrow W$ przekształceniem liniowym. Wówczas ϕ jest homomorfizmem modułów.
- (2) Niech A, B będą grupami abelowymi, $\phi : A \rightarrow B$ homomorfizmem grup. Wówczas ϕ jest homomorfizmem modułów.
- (3) Niech M, N będą lewymi R -modułami, $\phi : M \rightarrow N$ niech będzie dane wzorem $\phi(m) = 0_N$. Wówczas ϕ jest homomorfizmem modułów, nazywamy go **homomorfizmem zerowym**.

Twierdzenie 7.1. Niech R będzie pierścieniem, M, N lewymi R -modułami, $\phi : M \rightarrow N$ homomorfizmem modułów. Wówczas:

- (1) $\ker \phi < M$, $\text{im } \phi < N$;
- (2) ϕ jest homomorfizmem różnowartościowym wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker \phi = \{0_M\}$;
- (3) ϕ jest homomorfizmem surjektywnym wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{im } \phi = N$;
- (4) ϕ jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje homomorfizm $\psi : N \rightarrow M$ taki, że

$$\phi \circ \psi = \text{id}_N \text{ oraz } \psi \circ \phi = \text{id}_M;$$

- (5) ϕ jest homomorfizmem różnowartościowym wtedy i tylko wtedy, gdy jest monomorfizmem kategoryjnym modułów;
- (6) ϕ jest homomorfizmem surjektywnym wtedy i tylko wtedy, gdy jest epimorfizmem kategoryjnym modułów.

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup, w związku z czym pozostawiamy go Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Twierdzenie 7.2. Niech R będzie pierścieniem, M, N lewymi R -modułami, $\phi : M \rightarrow N$ homomorfizmem modułów, niech $M_1 < M$, $N_1 < N$. Wówczas:

- (1) $\phi(M_1) < N$;
- (2) $\phi^{-1}(N_1) < M$.

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup, w związku z czym pozostawiamy go Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Twierdzenie 7.3 (lemat o odpowiedniości między podmodułami). *Niech R będzie pierścieniem, M, N lewymi R -modułami, $\pi : M \rightarrow N$ homomorfizmem surjektywnym modułów i niech $K = \ker \pi$. Oznaczmy*

$$\mathcal{M} = \{M_1 : M_1 < M \text{ oraz } K \subset M_1\}, \mathcal{N} = \{N_1 : N_1 < N\}.$$

Wówczas odwzorowania

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{N}, \phi(M_1) = \pi(M_1), \\ \psi : \mathcal{N} &\rightarrow \mathcal{M}, \psi(N_1) = \pi^{-1}(N_1)1 \end{aligned}$$

są wzajemnie odwrotne.

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup, w związku z czym pozostawiamy go Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Definicja 7.2. *Niech R będzie pierścieniem, $M_1, \dots, M_n, N$ lewymi R -modułami. Odwzorowanie $\phi : M_1 \times \dots \times M_n \rightarrow N$ nazywamy **homomorfizmem n -liniowym**, jeśli dla każdego $i \in \{1, \dots, n\}$:*

- (1) dla $m_1 \in M_1, \dots, m_i, m'_i \in M_i, \dots, m_n \in M_n$:

$$\begin{aligned} &\phi(m_1, \dots, m_{i-1}, m_i + m'_i, m_{i+1}, \dots, m_n) \\ &= \phi(m_1, \dots, m_{i-1}, m_i, m_{i+1}, \dots, m_n) + \phi(m_1, \dots, m_{i-1}, m'_i, m_{i+1}, \dots, m_n), \end{aligned}$$

- (2) dla $m_1 \in M_1, \dots, m_n \in M_n$ oraz $a \in R$:

$$\phi(m_1, \dots, m_{i-1}, am_i, m_{i+1}, \dots, m_n) = a\phi(m_1, \dots, m_{i-1}, m_i, m_{i+1}, \dots, m_n).$$

Definicja i uwaga 7.1. *Niech R będzie pierścieniem, M lewym R -modulem, $N < M$. Oznaczmy*

$$m + N = \{m + n : n \in N\},$$

$$M/N = \{m + N : m \in M\}$$

i w zbiorze M/N określmy działania dodawania i mnożenia zewnętrznego:

$$(m_1 + N) + (m_2 + N) = (m_1 + m_2) + N,$$

$$a(m + N) = am + N.$$

*Wówczas M/N jest lewym R -modulem, nazywamy go **modulem ilorazowym M względem N** .*

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup, w związku z czym pozostawiamy go Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Przykłady:

- (4) Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem F , niech $W < V$. Wówczas przestrzeń ilorazowa V/W jest modulem ilorazowym.
- (5) Niech A będzie grupą abelową, niech $B < A$. Wówczas grupa ilorazowa A/B jest modulem ilorazowym.
- (6) Niech R będzie pierścieniem, niech $I \triangleleft R$. Wówczas pierścień ilorazowy R/I jest modulem ilorazowym.

jest przemienny.

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup, w związku z czym pozostawiamy go Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Wniosek 7.4. *Niech R będzie pierścieniem, M, N lewymi R -modułami, $K < M$, $\phi : M \rightarrow N$ homomorfizmem. Niech ponadto $K \subset \ker \phi$. Wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\psi : M/K \rightarrow N$ taki, że $\psi \circ \kappa = \phi$ (gdzie $\kappa : M \rightarrow M/K$ oznacza epimorfizm kanoniczny) oraz*

- (1) *jeśli ϕ jest surjektywny, to ψ jest surjektywny;*
- (2) *jeśli $K = \ker \phi$, to ψ jest różnowartościowy;*
- (3) *jeśli ϕ jest surjektywny i $K = \ker \phi$, to ψ jest izomorfizmem.*

Twierdzenie 7.5 (I twierdzenie Noether-Dedekinda o izomorfizmie). *Niech R będzie pierścieniem, M, N lewymi R -modułami, $\phi : M \rightarrow N$ homomorfizmem. Wówczas*

$$\operatorname{im} \phi \cong M / \ker \phi.$$

Twierdzenie 7.6 (II twierdzenie Noether-Dedekinda o izomorfizmie). *Niech R będzie pierścieniem, M lewym R -modułem, $N_1, N_2 < M$. Wówczas*

$$N_1 / N_1 \cap N_2 \cong (N_1 + N_2) / N_2.$$

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup, w związku z czym pozostawiamy go Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Twierdzenie 7.7 (II twierdzenie Noether-Dedekinda o izomorfizmie). *Niech R będzie pierścieniem, M lewym R -modułem, $N_1, N_2 < M$, $N_1 \subset N_2$. Wówczas*

$$M / N_2 \cong (M / N_1) / (N_2 / N_1).$$

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup, w związku z czym pozostawiamy go Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Twierdzenie 7.8 (o klasyfikacji unitarnych modułów cyklicznych). *Niech R będzie pierścieniem z jedynką, M lewym unitarnym R -modułem cyklicznym. Wówczas $M \cong R/I$, gdzie $I \triangleleft R$ jest pewnym ideałem lewostronnym.*

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup, w związku z czym pozostawiamy go Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.