

5. WYKŁAD 5: GENERATORY I RELACJE. KOD GENETYCZNY GRUPY. TWIERDZENIE NIELSENSA-SCHREIERA.

Głównym celem dzisiejszego wykładu jest następujący rezultat:

Twierdzenie 5.1 (Nielsena-Schreiera). *Podgrupa grupy wolnej jest wolna.*

Do zgrabnego przeprowadzenia potrzebnego w dowodzie rozumowania potrzebne będzie nam pojęcie kodu genetycznego grupy.

Definicja i uwaga 5.1. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, niech X będzie zbiorem generatorów grupy G , niech F będzie grupą wolną ze zbiorem wolnych generatorów X , a $N \triangleleft F$ taką podgrupą normalną, że $G \cong F/N$, przy czym izomorfizm ustanowiony jest odwzorowaniem $\eta : G \rightarrow F/N$ danym wzorem $\eta(g) = [g]N$, gdzie symbol $[g]$ oznacza słowo odpowiadające elementowi g . Wówczas jeżeli dla pewnych $g_1, \dots, g_n \in X$ w grupie G zachodzi równość

$$g_1^{k_1} \cdot \dots \cdot g_n^{k_n} = 1$$

to wtedy

$$[g_1]^{k_1} \cdot \dots \cdot [g_n]^{k_n} \in N.$$

Elementy grupy N nazywamy **relacjami** grupy G (w alfabecie będącym zbiorem jej generatorów), a o grupie $G \cong F/N$ mówimy, że jest **zadana za pomocą zbioru generatorów X i zbioru relacji N** . Niech $\mathcal{R}$ będzie minimalnym zbiorem generatorów grupy N . Parę $(X, \mathcal{R})$ nazywamy **kodem genetycznym** grupy G i piszemy

$$G = gr(X || \mathcal{R}).$$

Jeżeli obydwa zbiory X i $\mathcal{R}$ są skończone, to mówimy, że G jest **grupą o skończonym opisie**.

Przykład:

(1) Kodem genetycznym grupy $\mathbb{Z}_5$ jest $gr(a || [a]^5)$.

Podamy tu bez dowodu kilka twierdzeń sygnalizujących możliwe problemy, jakie można napotkać przy wyznaczaniu kodów genetycznych grup:

Twierdzenie 5.2 (Neumann'a). *Istnieją grupy skończenie generowane, które nie są grupami o skończonym opisie.*

Twierdzenie 5.3 (Nowikowa–Bonne'a). *Nie istnieje algorytm rozstrzygający, czy dwa słowa grupy o skończonym opisie reprezentują element 1.*

Wniosek 5.1. *Nie istnieje algorytm rozstrzygający, czy dwa słowa grupy o skończonym opisie są równoważne.*

Twierdzenie 5.4 (Nowikowa). *Nie istnieje algorytm rozstrzygający, czy dwie grupy o skończonym opisie są izomorficzne.*

Wracamy teraz do głównego zadania na dzisiejszy wykład. Dowód twierdzenia Nielsena-Schreiera poprzedzimy dwoma lematami.

Lemat 5.1. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, $\phi : G \rightarrow G$ endomorfizmem takim, że $\phi \circ \phi = \phi$. Niech $K = \ker \phi$, $L = \operatorname{im} \phi$. Wówczas

$$G = KL, K \cap L = \{1\}$$

oraz $K = \langle \{g\phi(g^{-1}) : g \in G\} \rangle$.

Dowód. Pokażemy najpierw, że $G = KL$. Inkluzja $(\supset)$ jest oczywista, a dla dowodu inkluzji $(\subset)$ ustalmy $g \in G$. Wówczas $g \in K$ lub $\phi(g) \in L \setminus \{1\}$. Gdy $g \in K$, to $g \in KL$. Gdy $\phi(g) = h$, $h \neq 1$, to $\phi(g) = \phi(\phi(g)) = \phi(h)$, więc $\phi(\frac{g}{h}) = 1$, czyli $\frac{g}{h} \in K$, lub $g \in Kh \subset KL$, gdyż $h \in L$.

Dalej, pokażemy, że $KL = \{1\}$. Tak jak przed chwilą inkluzja $(\supset)$ jest oczywista, a dla dowodu inkluzji $(\subset)$ ustalmy $g \in K \cap L$. Wówczas $g = \phi(h)$, $h \in G$ oraz $\phi(g) = 1$. Zatem $1 = \phi(g) = \phi(\phi(h)) = \phi(h)$. Ale $\phi(h) = g$, więc $g = 1$.

Pozostaje pokazać, że $K = \langle \{g\phi(g^{-1}) : g \in G\} \rangle$. Dla dowodu inkluzji $(\supset)$ ustalmy $g \in G$. Wówczas $\phi(g\phi(g^{-1})) = \phi(g)\phi(g^{-1}) = \phi(1) = 1$. Na odwrót, dla dowodu inkluzji $(\subset)$ ustalmy $h \in K$. Niech $h = ga$, $\phi(g) = 1$, $a = \phi(b)$, $b \in G$. Wówczas $h = g\phi(b)$, skąd $hg^{-1} = \phi(b)$, zatem $\phi(g^{-1}) = \phi(h)\phi(g^{-1}) = \phi(\phi(b)) = \phi(b) = a$. Tak więc $h = g\phi(g^{-1})$. $\square$

Lemat 5.2. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą wolną ze zbiorem wolnych generatorów $\{g_i : i \in I\}$, niech $J \subset I$ i niech H będzie najmniejszą podgrupą normalną zawierającą zbiór $\{g_j : j \in J\}$. Wówczas G/H jest wolna.

Dowód. Pokażemy, że $G/H = \langle \{g_i H : i \in I \setminus J\} \rangle$. Inkluzja $(\supset)$ jest oczywista. Aby pokazać inkluzję $(\subset)$ ustalmy $gH \in G/H$. Niech $g = g_{i_1}^{k_1} \dots g_{i_n}^{k_n}$. Wówczas

$$gH = (g_{i_1} H)^{k_1} \dots (g_{i_n} H)^{k_n} \in \langle \{g_i H : i \in I \setminus J\} \rangle.$$

Ustalmy dowolną grupę K generowaną przez zbiór równoliczny z $I \setminus J$, powiedzmy $K = \langle \{h_i : i \in I \setminus J\} \rangle$. Zdefiniujmy odwzorowanie $h : G/H \rightarrow K$ wzorem

$$h(g_{i_1}^{k_1} \dots g_{i_n}^{k_n} H) = h_{i_1}^{k_1} \dots h_{i_n}^{k_n}, i_1, \dots, i_n \in I \setminus J.$$

Bez trudu sprawdzamy, że h jest jedynym takim homomorfizmem, że $h(g_i) = h_i$, $i \in I \setminus J$. Tym samym, wobec Twierdzenia 4.1, G/H jest wolna. $\square$

Definicja 5.1. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą wolną ze zbiorem wolnych generatorów $\{g_i : i \in I\}$, niech $g \in G$. Wówczas **długością** słowa g nazywamy liczbę

$$l(g) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } g = 1, \\ n, & \text{gdy } g = g_{i_1}^{e_1} \dots g_{i_n}^{e_n}, e_i \in \{-1, +1\}, \text{ jest postacią zredukowaną } g. \end{cases}$$

Przechodzimy teraz do dowodu twierdzenia Nielsena-Schreiera.

Dowód. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą wolną ze zbiorem wolnych generatorów $\{g_i : i \in I\}$, niech H będzie podgrupą grupy G , niech $W_P(H) = \{Hg : g \in G\}$, oznaczmy przez $\overline{Hg} \in G$ jedyne reprezentanta warstwy $Hg \in W_P(H)$ tak, aby $\{\overline{Hg} \in G : Hg \in W_P(H)\}$ był układem reprezentantów wszystkich warstw $W_P(H)$. Ponadto dla ustalonego $x \in \{g_i : i \in I\}$ oraz $\overline{Hg} \in G$ zdefiniujmy element $t_{g,x} \in G$:

$$t_{g,x} = \overline{Hg}x(\overline{Hg})^{-1}.$$

Zauważmy, że $t_{g,x} \in H$: istotnie, $H \cdot \overline{Hg} \cdot x = H \cdot gx$ oraz $H \cdot \overline{Hg}x = H \cdot gx$, a więc $\overline{Hg}x(\overline{Hg})^{-1} \in H$.

Niech $\{y_{g,x} : x \in \{g_i : i \in I\}, \overline{Hg} \in G\}$ będzie zbiorem równolicznym z $\{t_{g,x} : x \in \{g_i : i \in I\}, \overline{Hg} \in G\}$ o parami różnych elementach, niech F będzie grupą wolną ze zbiorem wolnych generatorów $\{y_{g,x} : x \in \{g_i : i \in I\}, \overline{Hg} \in G\}$. Dla ustalonej warstwy $Hg \in W_P(H)$ zdefiniujmy funkcję $f^{Hg} : \{1\} \cup \{g_i : i \in I\} \cup \{g_i^{-1} : i \in I\} \rightarrow \{y_{g,x} : x \in \{g_i : i \in I\}, \overline{Hg} \in G\}$ wzorem

$$f^{Hg}(1) = 1, f^{Hg}(x) = y_{g,x}, f^{Hg}(x^{-1}) = y_{g,x^{-1}}.$$

Pokażemy, że f^{Hg} można przedłużyć do odwzorowania $\widetilde{f^{Hg}} : G \rightarrow F$ takiego, że

$$\widetilde{f^{Hg}}(uv) = \widetilde{f^{Hg}}(u) \cdot \widetilde{f^{Hg}}(v).$$

Dowód prowadzimy przez indukcję ze względu na długość n słowa u . Dla $n = 0$ teza jest oczywista. Dla $n > 1$ założmy, że dla wszystkich $Hg \in W_P(H)$ funkcje $\widetilde{f^{Hg}} : G \rightarrow F$ zostały już zdefiniowane dla słów długości nie większej niż n . Niech u będzie słowem długości $n + 1$. Wówczas $u = x^e w$, gdzie $x \in \{g_i : i \in I\}$, $e \in \{-1, +1\}$ oraz $l(w) = n$. Niech

$$\widetilde{f^{Hg}}(u) = \widetilde{f^{Hg}}(x^e) \widetilde{f^{Hg x^e}}(w).$$

Ustalmy słowo v i niech ponadto $w = g_{i_1}^{e_1} \dots g_{i_n}^{e_n}$, gdzie $i_1, \dots, i_n \in I$, $e_1, \dots, e_n \in \{-1, +1\}$. Wówczas:

$$\begin{aligned} \widetilde{f^{Hg}}(uv) &= \widetilde{f^{Hg}}(x^e g_{i_1}^{e_1} \dots g_{i_n}^{e_n} v) = \widetilde{f^{Hg}}(x^e) \widetilde{f^{Hg x^e}}(g_{i_1}^{e_1} \dots g_{i_n}^{e_n} v) \\ &= \widetilde{f^{Hg}}(x^e) \widetilde{f^{Hg x^e}}(g_{i_1}^{e_1}) \widetilde{f^{Hg x^e g_{i_1}^{e_1}}}(g_{i_2}^{e_2} \dots g_{i_n}^{e_n} v) \\ &= \widetilde{f^{Hg}}(x^e g_{i_1}^{e_1}) \widetilde{f^{Hg x^e g_{i_1}^{e_1}}}(g_{i_2}^{e_2} \dots g_{i_n}^{e_n} v) \\ &\vdots \\ &= \widetilde{f^{Hg}}(x^e g_{i_1}^{e_1} \dots g_{i_n}^{e_n}) \widetilde{f^{Hg x^e g_{i_1}^{e_1} \dots g_{i_n}^{e_n}}}(v) = \widetilde{f^{Hg}}(u) \cdot \widetilde{f^{Hgu}}(v). \end{aligned}$$

Wobec Twierdzenia 4.1 istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\alpha : F \rightarrow H$ taki, że $\alpha(y_{g,x}) = t_{g,x}$. Pokażemy, że

$$\alpha(\widetilde{f^{Hg}}(u)) = \overline{Hgu}(\overline{Hgu})^{-1}.$$

Dowód prowadzimy przez indukcję ze względu na długość n słowa u . Dla $n = 0$ teza jest oczywista. Dla $n = 1$ ustalmy słowo $u = x^e$, gdzie $x \in \{g_i : i \in I\}$, $e \in \{-1, +1\}$ i zauważmy, że

$$\alpha(\widetilde{f^{Hg}}(x^e)) = \alpha(y_{g,x^e}) = t_{g,x^e} = \overline{Hgx^e}(\overline{Hgx^e})^{-1}.$$

Dla $n > 1$ założmy, że dla wszystkich $Hg \in W_P(H)$ żądany wzór zachodzi dla słów długości nie większej niż n . Niech u będzie słowem długości $n + 1$. Wówczas $u = x^e w$, gdzie $x \in \{g_i : i \in I\}$, $e \in \{-1, +1\}$ oraz $l(w) = n$. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \alpha(\widetilde{f^{Hg}}(x^e w)) &= \alpha(\widetilde{f^{Hg}}(x^e) \widetilde{f^{Hg x^e}}(w)) \\ &= \overline{Hgx^e}(\overline{Hgx^e})^{-1} \overline{Hgx^e w}(\overline{Hgx^e w})^{-1} \\ &= \overline{Hgu}(\overline{Hgu})^{-1}. \end{aligned}$$

Pokażemy, że istnieje homomorfizm $\beta : H \rightarrow F$ taki, że $\alpha \circ \beta = id_H$. Zdefiniujemy odwzorowanie $\beta : H \rightarrow F$ wzorem

$$\beta(u) = \widetilde{f^H}(u), u \in H.$$

Ponieważ $\widetilde{f^H}(uv) = \widetilde{f^H}(u) \cdot \widetilde{f^H}(v) = \widetilde{f^H}(u) \cdot \widetilde{f^H}(v)$, dla $u, v \in H$, więc β jest homomorfizmem. Dalej, ponieważ $\alpha(\beta(u)) = \alpha(\widetilde{f^H}(u)) = \overline{Hu}(\overline{Hu})^{-1} = 1u1^{-1} = u$ dla $u \in H$, więc $\alpha \circ \beta = id_H$.

W szczególności widzimy, że α jest surjekcją. Tym samym $\{t_{g,x} : x \in \{g_i : i \in I\}, \overline{Hg} \in G\}$ jest zbiorem generatorów grupy H . W dalszym ciągu pokażemy, że

$$gr(\{y_{g,x} : x \in \{g_i : i \in I\}, \overline{Hg} \in G\} || [\widetilde{f^H}(\overline{Hg})])$$

jest kodem genetycznym grupy H . Istotnie, ponieważ α jest surjekcją, więc $H \cong F / \ker \alpha$. Ponieważ $\{t_{g,x} : x \in \{g_i : i \in I\}, \overline{Hg} \in G\}$ generuje H i jest równoliczny z $\{y_{g,x} : x \in \{g_i : i \in I\}, \overline{Hg} \in G\}$, więc F jest grupą wolną, której zbiór wolnych generatorów jest zbiorem generatorów grupy H . Zdefiniujmy odwzorowanie $\phi : F \rightarrow F$ wzorem

$$\phi = \beta \circ \alpha.$$

Oczywiście ϕ jest homomorfizmem. Zauważmy, że $\ker \phi = \ker \alpha$; istotnie, dla dowodu inkluzji ($\supset$) ustalmy $u \in \ker \alpha$ i odnotujmy, że wówczas $\alpha(u) = 1$, a więc $\phi(u) = \beta(\alpha(u)) = \beta(1) = 1$, więc $u \in \ker \phi$. Na odwrót, dla dowodu inkluzji ($\subset$) ustalmy $u \in \ker \phi$ i zauważmy, że wówczas $\phi(u) = \beta(\alpha(u)) = 1$, skąd $\alpha(\beta(\alpha(u))) = \alpha(1) = 1$, ale ponieważ $\alpha \circ \beta = id_H$, więc $1 = \alpha(\beta(\alpha(u))) = \alpha(u)$, czyli $u \in \ker \alpha$. Skoro $\phi \circ \phi(u) = \beta \circ \alpha \circ \beta \circ \alpha(u) = \beta \circ id_H \circ \alpha(u) = \beta \circ \alpha(u) = \phi(u)$, więc $\phi \circ \phi = \phi$. Wobec Lematu 5.1

$$\ker \alpha = \ker \phi = \langle \{y_{g,x} \phi(y_{g,x}^{-1}) : y_{g,x} \text{ jest generatorem } F\} \rangle.$$

Zatem

$$gr(\{y_{g,x} : x \in \{g_i : i \in I\}, \overline{Hg} \in G\} || [y_{g,x} \phi(y_{g,x}^{-1})])$$

jest kodem genetycznym grupy H . Ponadto

$$\begin{aligned} \phi(y_{g,x}) &= \beta(\alpha(y_{g,x})) = \beta(t_{g,x}) = \widetilde{f^H}(t_{g,x}) = \widetilde{f^H}(\overline{Hg}x(\overline{Hgx})^{-1}) \\ &= \widetilde{f^H}(\overline{Hg}) \widetilde{f^{H\overline{Hg}}}(x(\overline{Hgx})^{-1}) = \widetilde{f^H}(\overline{Hg}) \widetilde{f^{H\overline{Hg}}}(x) \widetilde{f^{H\overline{Hg}x}}((\overline{Hgx})^{-1}) \\ &= \widetilde{f^H}(\overline{Hg}) \widetilde{f^{H\overline{Hg}}}(x) \widetilde{f^{H\overline{Hg}x}}((\overline{Hgx})^{-1}) = \widetilde{f^H}(\overline{Hg}) y_{g,x} \widetilde{f^{H\overline{Hg}x}}((\overline{Hgx})^{-1}). \end{aligned}$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} 1 &= \widetilde{f^{H\overline{Hg}x}}(1) = \widetilde{f^{H\overline{Hg}x}}((\overline{Hgx})^{-1} \overline{Hgx}) \\ &= \widetilde{f^{H\overline{Hg}x}}((\overline{Hgx})^{-1}) \widetilde{f^{H\overline{Hg}x}(\overline{Hgx})^{-1}}(\overline{Hgx}) \\ &= \widetilde{f^{H\overline{Hg}x}}((\overline{Hgx})^{-1}) \widetilde{f^H}(\overline{Hgx}), \end{aligned}$$

więc $\widetilde{f^{H\overline{Hg}x}}((\overline{Hgx})^{-1}) = (\widetilde{f^H}(\overline{Hgx}))^{-1}$ i stąd

$$\phi(y_{g,x}) = \widetilde{f^H}(\overline{Hg}) y_{g,x} (\widetilde{f^H}(\overline{Hgx}))^{-1}.$$

Niech N będzie najmniejszą podgrupą normalną grupy F zawierającą zbiór $\{\widetilde{f^H}(\overline{Hg}) : \overline{Hg} \in G\}$, niech M będzie najmniejszą podgrupą normalną grupy F zawierającą zbiór $\{y_{g,x} \phi(y_{g,x}^{-1}) : y_{g,x} \text{ jest generatorem } F\}$. Oczywiście $\widetilde{f^H}(\overline{Hg}) \in N$ oraz $\widetilde{f^H}(\overline{Hgx}) \in N$. Zatem

$$y_{g,x}^{-1} \phi(y_{g,x}) = y_{g,x}^{-1} \widetilde{f^H}(\overline{Hg}) y_{g,x} (\widetilde{f^H}(\overline{Hgx}))^{-1} \in N,$$

więc $M \subset N$. Zauważmy, że

$$\alpha(\widetilde{f^H}(\overline{Hgx})) = \overline{H\overline{Hgx}}(\overline{H\overline{Hgx}})^{-1} = \overline{Hgx}(\overline{Hgx})^{-1} = 1,$$

tak więc $\widetilde{f^H}(\overline{Hgx}) \in \ker \alpha = \langle \{y_{g,x} \phi(y_{g,x}^{-1}) : y_{g,x} \text{ jest generatorem } F\} \rangle$. Zatem

$$\widetilde{f^H}(\overline{Hgx}) = \phi(y_{g,x}) \widetilde{f^H}(\overline{Hgx}) y_{g,x}^{-1} = \phi(y_{g,x}) y_{g,x}^{-1} (y_{g,x} \widetilde{f^H}(\overline{Hgx}) y_{g,x}^{-1}) \in M$$

więc $N \subset M$. Ostatecznie $M = N$.

Pokażemy, że istnieje układ reprezentantów B warstw $W_P(H)$ taki, że jeśli $b = g_{i_1}^{e_1} \dots g_{i_n}^{e_n} \in B$ jest słowem zredukowanym, to $g_{i_1}^{e_1} \dots g_{i_k}^{e_k} \in B$ dla $k \in \{1, \dots, n\}$. Niech, dla ustalonego $Hg \in W_P(H)$, $l(Hg) = \min\{l(x) : \overline{Hx} = \overline{Hg}\}$. Dowód prowadzimy przez indukcję względem $l(Hg)$. Dla $l(Hg) = 1$ stosownym reprezentantem jest 1. Dla $l(Hg) > 1$ założmy, że wybraliśmy układ reprezentantów dla wszystkich warstw długości nie większej od $n = l(Hg)$. Niech $l(Hz) = n + 1$ i niech $\overline{Hz} = \overline{Hux}^e$, gdzie $x \in \{g_i : i \in I\}$, $e \in \{-1, +1\}$ oraz $l(u) = n$. Wówczas $l(Hu) \leq n$, istnieje więc reprezentant b warstwy Hu taki, że każdy początkowy segment b jest również reprezentantem. Wtedy bx^e jest szukanym reprezentantem warstwy $Hx = Hu x^e = Hbx^e$.

Pokażemy, co zakończy już dowód, że $\{t_{b,x} : t_{b,x} \neq 1, x \in \{g_i : i \in I\}, b \in B\}$ jest zbiorem wolnych generatorów grupy H . Niech L będzie najmniejszą podgrupą normalną grupy F zawierającą zbiór $\{\widetilde{f^H}(b) : b \in B\}$, niech K będzie najmniejszą podgrupą normalną grupy F zawierającą zbiór $\{y_{b,x} : t_{b,x} = 1, x \in \{g_i : i \in I\}, b \in B\}$. Wobec wcześniejszej części dowodu, $K \subset L$.

Pokażemy, że dla dowolnego $b \in B$ $\widetilde{f^H}(b)$ jest słowem zdefiniowanym przez $\{y_{b,x} : t_{b,x} = 1, x \in \{g_i : i \in I\}, b \in B\}$. Dowód prowadzimy przez indukcję ze względu na długość b . Dla $l(b) = 0$, $b = 1$ oraz $\widetilde{f^H}(1) = 1$. Dla $l(b) > 0$ założmy, że dla dowolnego słowa $b \in B$ o długości nie większej niż $n = l(b)$, $\widetilde{f^H}(b)$ jest słowem zdefiniowanym przez $\{y_{b,x} : t_{b,x} = 1, x \in \{g_i : i \in I\}, b \in B\}$. Niech $b = ux^e \in B$, gdzie $x \in \{g_i : i \in I\}$, $e \in \{-1, +1\}$ oraz $l(u) = n$. Wówczas, zgodnie z definicją zbioru B , u jest reprezentantem pewnej warstwy. Ponadto:

$$\widetilde{f^H}(b) = \widetilde{f^H}(ux^e) = \widetilde{f^H}(u)\widetilde{f^{Hu}}(x^e).$$

Wobec założenia indukcyjnego $\widetilde{f^H}(u)$ jest słowem zdefiniowanym przez $\{y_{b,x} : t_{b,x} = 1, x \in \{g_i : i \in I\}, b \in B\}$. Jeśli $e = 1$, to $\widetilde{f^{Hu}}(x^e) = \widetilde{f^{Hu}}(x) = y_{u,x}$. Ponadto

$$t_{u,x} = \alpha(y_{u,x}) = \alpha(\widetilde{f^{Hu}}(x)) = \overline{Hux}(\overline{Hux})^{-1} = ux(ux)^{-1} = 1.$$

Jeśli $e = -1$, to ponieważ $b = ux^e$ i $u \in B$, więc $u = \overline{Hbx}$. Mamy:

$$\widetilde{f^{Hu}}(x^e) = \widetilde{f^{Hu}}(x^{-1}) = \widetilde{f^{H\overline{Hbx}}}(x^{-1}) = \widetilde{f^{Hbx}}(x^{-1}) = y_{bx,x^{-1}}.$$

Ponadto

$$t_{bx,x^{-1}} = \overline{Hbx}x^{-1}(\overline{Hbx}x^{-1})^{-1} = \overline{Hbx}x^{-1}(\overline{Hb})^{-1} = (\overline{Hbx}(\overline{Hbx})^{-1})^{-1} = (ux^{-1}xu^{-1})^{-1} = 1.$$

Zatem $L \subset K$ i tym samym $L = K$. Wobec tego

$$H \cong F/\ker \alpha \cong F/M \cong F/N \cong F/L \cong F/K$$

przy czym K jest najmniejszą podgrupą normalną zawierającą pewien podzbiór zbioru generatorów grupy F . Wobec Lematu 5.2, H jest wolna. $\square$

Twierdzenie 5.5 (Kurosza). *Niech $\{G_i : i \in I\}$ będzie rodziną grup, niech G będzie ich iloczynem wolnym, niech $H < G$. Wówczas*

$$H = F * \prod_{j \in J}^* H_j,$$

gdzie F jest grupą wolną oraz H_j jest sprzężona z pewną grupą G_i , $i \in I$.