

4. WYKŁAD 4: GRUPY WOLNE.

Definicja 4.1. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, niech $\{g_i : i \in I\} \subset G$ będzie rodziną elementów grupy G taką, że $\langle g_i \rangle$, $i \in I$, jest nieskończoną grupą cykliczną. Jeżeli $G = \prod_{i \in I}^* \langle g_i \rangle$, to wówczas G nazywamy **grupą wolną**, a rodzinę $\{g_i : i \in I\}$ **zbiorem wolnych generatorów**.

Twierdzenie 4.1 (własność uniwersalna grup wolnych). Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą. Wówczas G jest grupą wolną o zbiorze wolnych generatorów $\{g_i : i \in I\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej grupy H i jej rodziny elementów $\{h_i : i \in I\}$ istnieje homomorfizm $h : G \rightarrow H$ taki, że $h(g_i) = h_i$.

Dowód. ($\Rightarrow$): Załóżmy, że $G = \prod_{i \in I}^* \langle g_i \rangle$, $|\langle g_i \rangle| = \infty$, $\{g_i : i \in I\} \subset G$. Istnieje homomorfizm $\tilde{h}_i : \langle g_i \rangle \rightarrow H$ taki, że $\tilde{h}_i(g_i) = h_i$, $i \in I$. Wobec Lematu 2.1 istnieje dokładnie jeden homomorfizm $h : G \rightarrow H$ taki, że $h(g_i) = \tilde{h}_i(g_i) = h_i$, $i \in I$.

($\Leftarrow$): Załóżmy, że dla dowolnej grupy abelowej H i jej rodziny elementów $\{h_i : i \in I\}$ istnieje homomorfizm $h : G \rightarrow H$ taki, że $h(g_i) = h_i$. Ustalmy $i \in I$. Niech $h : G \rightarrow \mathbb{Z}$ będzie takim homomorfizmem, że $h(g_i) = 1$, $h(g_j) = 0$, $i \neq j$. Wobec tego $|\langle g_i \rangle| = \infty$. Tym samym $G = \prod_{i \in I}^* \langle g_i \rangle$. $\square$

Wniosek 4.1. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą wolną. Wówczas G jest abelowa wtedy i tylko wtedy, gdy G jest sumą prostą nieskończonych grup cyklicznych.

Dowód. ($\Leftarrow$): oczywiste. ($\Rightarrow$): niech A będzie grupą abelową generowaną przez $\{a_i : i \in I\}$, przy czym $\{g_i : i \in I\}$ jest zbiorem wolnych generatorów grupy G indeksowanym elementami tego samego zbioru I . Wobec Twierdzenia 4.1 istnieje homomorfizm $\phi : G \rightarrow A$ taki, że $\phi(g_i) = a_i$, $i \in I$. Oczywiście ϕ jest surjekcją, a więc wobec Twierdzenia 3.3 G jest wolną grupą abelową. $\square$

Twierdzenie 4.2. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, niech $G = G_1 * G_2$, gdzie G_1, G_2 są grupami wolnymi z wolnymi zbiorami generatorów $\{g_i : i \in I\}$, $\{g'_j : j \in J\}$, odpowiednio. Wówczas G jest grupą wolną o wolnym zbiorze generatorów $\{g_i : i \in I\} \cup \{g'_j : j \in J\}$.

Dowód wynika bezpośrednio z poprzedniego wniosku.

Twierdzenie 4.3. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą wolną ze zbiorem wolnych generatorów $\{g_i : i \in I\}$. Wówczas $G/[G, G]$ jest wolną grupą abelową z bazą $\{g_i + [G, G] : i \in I\}$.

Dowód. Niech A będzie grupą abelową generowaną przez $\{a_i : i \in I\}$, przy czym $\{g_i : i \in I\}$ jest zbiorem wolnych generatorów grupy G indeksowanym elementami tego samego zbioru I . Wobec Twierdzenia 4.1 istnieje homomorfizm $h : G \rightarrow A$ taki, że $h(g_i) = a_i$, $i \in I$. Ponieważ A jest abelowa, więc $[G, G] < \ker h$, a więc wobec twierdzenia o homomorfizmie istnieje dokładnie jeden homomorfizm $f : G/[G, G] \rightarrow A$ taki, że $f \circ \kappa = h$, czyli $f(g_i + [G, G]) = a_i$, $i \in I$. Tym samym na podstawie Twierdzenia 3.3 $G/[G, G]$ jest wolną grupą abelową z bazą $\{g_i + [G, G] : i \in I\}$. $\square$

Twierdzenie 4.4. Niech G_1, G_2 będą grupami wolnymi ze zbiorami wolnych generatorów $\{g_i : i \in I\}$ i $\{h_j : j \in J\}$, odpowiednio. Wówczas $G_1 \cong G_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|I| = |J|$.

Dowód. ($\Rightarrow$): załóżmy, że $G_1 \cong G_2$. Wobec poprzedniego twierdzenia, $G_1/[G_1, G_1]$ i $G_2/[G_2, G_2]$ są wolnymi grupami abelowymi z bazami $\{g_i + [G_1, G_1] : i \in I\}$ i $\{h_j + [G_2, G_2] : j \in J\}$, odpowiednio. Ponadto $G_1/[G_1, G_1] \cong G_2/[G_2, G_2]$, więc $|I| = |J|$.

($\Leftarrow$): Załóżmy, że funkcja $f : I \rightarrow J$ ustala bijekcję pomiędzy zbiorami indeksów I i J . Wobec Twierdzenia 4.1 istnieją homomorfizmy $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ taki, że $\phi(g_i) = h_{f(i)}$, $i \in I$, oraz $\psi : G_2 \rightarrow G_1$ taki, że $\psi(h_j) = g_{f^{-1}(j)}$, $j \in J$. Wobec tego

$$\phi \circ \psi(h_j) = \phi(g_{f^{-1}(j)}) = h_j \text{ oraz } \psi \circ \phi(g_i) = \psi(h_{f(i)}) = g_i,$$

a zatem $\phi \circ \psi = id_{G_2}$ oraz $\psi \circ \phi = id_{G_1}$. $\square$

Definicja 4.2. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą wolną ze zbiorem wolnych generatorów $\{g_i : i \in I\}$. Moc zbioru I nazywamy **rangą** grupy G i oznaczamy $\text{rank } G$.

Twierdzenie 4.5. Każda grupa jest homomorficznym obrazem pewnej grupy wolnej.

Dowód. Pokażemy, że dla każdej grupy G istnieje grupa wolna F i jej podgrupa H taka, że $G \cong F/H$. Niech $\{g_i : i \in I\}$ będzie zbiorem generatorów grupy G . Wobec Twierdzenia 4.1 istnieje homomorfizm $h : F \rightarrow G$, który w tym wypadku będzie surjekcją. Niech $H = \ker h$. Wówczas $H \triangleleft F$ i stosując twierdzenie o izomorfizmie otrzymujemy, że $G \cong F/H$. $\square$