

## 2. WYKŁAD 2: KOPRODUKTY GRUP.

Na poprzednim wykładzie zobaczyliśmy między innymi, że konstrukcja słabego iloczynu prostego grup spełnia pewną własność uniwersalną dla grup abelowych, ale niekoniecznie spełnia ją dla grup, które nie są abelowe. Podamy obecnie konstrukcję iloczynu wolnego grup i zobaczymy, że taki iloczyn ma własność koproduktu dla dowolnej rodziny grup, w szczególności grup nieprzemiennej.

**Definicja 2.1.** Niech  $(G, \cdot)$  będzie grupą,  $\{G_i : i \in I\}$  rodziną podgrup grupy  $G$ . Mówimy, że rodzina  $\{G_i : i \in I\}$  **generuje** grupę  $G$ , jeżeli każdy element  $a \in G$  można zapisać jako skończony iloczyn elementów grup  $G_i$ . Jeżeli  $a = a_1 \cdot \dots \cdot a_n$ ,  $a \in G$ ,  $a_1, \dots, a_n \in \bigcup_{i \in I} G_i$ , to ciąg  $(a_1, \dots, a_n)$  nazywamy **słowem** w grupach  $G_i$ , które **reprezentuje** element  $a \in G$ . Słowo  $(a_1, \dots, a_n)$ , w którym żadna z grup  $G_i$  nie zawiera jednocześnie  $a_j$  i  $a_{j+1}$ ,  $j \in \{1, \dots, n-1\}$  oraz  $a_j \neq 1$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ , nazywamy **słowem zredukowanym**. Przyjmujemy też, że zbiór pusty reprezentuje słowo długości 0 odpowiadające elementowi neutralnemu.

**Definicja 2.2.** Niech  $(G, \cdot)$  będzie grupą,  $\{G_i : i \in I\}$  rodziną podgrup generującą grupę  $G$ . Załóżmy, że  $G_i \cap G_j = \{1\}$  dla  $i \neq j$ . Mówimy, że  $G$  jest **iloczynem wolnym** grup  $\{G_i : i \in I\}$ , jeżeli dla każdego  $a \in G$  istnieje dokładnie jedno zredukowane słowo reprezentujące  $a$ . Oznaczamy  $G = \prod_{i \in I}^* G_i$  lub, w przypadku skończonym,  $G = G_1 * \dots * G_n$ .

**Uwaga 2.1.** Niech  $(G, \cdot)$  będzie iloczynem wolnym podgrup  $\{G_i : i \in I\}$ , niech  $(a_1, \dots, a_n)$  będzie słowem takim, że  $a_i \neq 1$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Wówczas dla każdego  $i \in \{1, \dots, n\}$  istnieje dokładnie jeden indeks  $k_i \in I$  taki, że  $a_i \in G_{k_i}$ .

**Uwaga 2.2.** Niech  $(G, \cdot)$  będzie grupą, niech  $\{G_i : i \in I\}$  będzie rodziną podgrup generującą  $G$ . Załóżmy, że  $G_i \cap G_j = \{1\}$  dla  $i \neq j$ . Pokazać, iż wówczas  $G = \prod_{i \in I}^* G_i$  wtedy i tylko wtedy, gdy 1 jest reprezentowana przez dokładnie jedno słowo.

*Dowód.* Dowód implikacji  $(\Rightarrow)$  jest oczywisty, skupimy się na dowodzie implikacji  $(\Leftarrow)$ . Załóżmy, że 1 jest reprezentowane przez dokładnie jedno słowo. Ustalmy  $a \in G$  i niech  $(a_1, \dots, a_n)$  oraz  $(b_1, \dots, b_m)$  będą słowami zredukowanymi reprezentującymi  $a$ . Niech  $a_i \in G_{k_i}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $b_j \in G_{l_j}$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Ponieważ  $a = a_1 \dots a_n = b_1 \dots b_m$ , więc słowo  $(b_m^{-1}, \dots, b_1^{-1}, a_1, \dots, a_n)$  reprezentuje 1 i wobec tego musi być redukowalne. Zatem  $a_1 = b_1$ . Postępując indukcyjnie otrzymujemy kolejno  $a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$  i  $n = m$ .  $\square$

### Przykład:

(1) Rozważmy grupę  $S(3)$ . Niech

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Niech  $G_1 = \langle \sigma_1 \rangle$ ,  $G_2 = \langle \sigma_2 \rangle$ . Wówczas rodzina  $\{G_1, G_2\}$  generuje  $S(3)$ , ale  $S(3) \neq G_1 * G_2$ .

**Lemat 2.1.** Niech  $(G, \cdot)$  będzie grupą,  $\{G_i : i \in I\}$  rodziną podgrup grupy  $G$ . Jeżeli  $G = \prod_{i \in I}^* G_i$ , to wówczas spełniony jest następujący warunek:

**(EC)**  $\forall H$  – grupa  $\forall h_i : G_i \rightarrow H$  – homomorfizmy  $\exists ! h : G \rightarrow H$  – homomorfizm  $\forall i \in I [h \upharpoonright_{G_i} = h_i]$ .<sup>1</sup>

*Dowód.* Pokażemy jednoznaczność stosownego homomorfizmu. Załóżmy, że warunek (EC) jest spełniony. Ustalmy  $a \in G$  i niech  $(a_1, \dots, a_n)$  reprezentuje  $a$ ,  $a_i \in G_{k_i}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Wówczas

$$h(a) = h(a_1) \cdot \dots \cdot h(a_n) = h_{k_1}(a_1) \cdot \dots \cdot h_{k_n}(a_n),$$

<sup>1</sup>extension condition

zatem  $h$  jest wyznaczony jednoznacznie przez  $h_{k_1}, \dots, h_{k_n}$ .

Pokażemy istnienie stosownego homomorfizmu. Zdefiniujemy odwzorowanie  $h : G \rightarrow H$  wzorem

$$h(a) = \begin{cases} h_{k_1}(a_1) \cdot \dots \cdot h_{k_n}(a_n), & \text{gdy } a \neq 1, a = a_1 \dots a_n, a_i \in G_{k_i}, i \in \{1, \dots, n\}, \\ 1, & \text{gdy } a = 1. \end{cases}$$

Ponieważ reprezentacja  $a \in G$  przez słowo zredukowane jest jednoznaczna,  $h$  jest dobrze zdefiniowane. Pozostaje pokazać, że  $h$  jest homomorfizmem.

Dla słowa  $w = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $a_i \in G_{k_i}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , zdefiniujemy element  $\phi(w) \in H$  warunkiem

$$\phi(w) = h_{k_1}(a_1) \cdot \dots \cdot h_{k_n}(a_n),$$

lub  $\phi(w) = 1$  gdy  $w = \emptyset$ . Niech  $w'$  będzie słowem otrzymanym z  $w$  poprzez dokonanie redukcji. Pokażemy, że  $\phi(w) = \phi(w')$ .

Założmy, że  $a_i = 1$ . Wówczas  $w' = (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$ . Ponieważ  $h_{k_i}(1) = 1$ , więc

$$\phi(w) = h_{k_1}(a_1) \cdot \dots \cdot h_{k_i}(a_i) \cdot \dots \cdot h_{k_n}(a_n) = h_{k_1}(a_1) \cdot \dots \cdot h_{k_n}(a_n) = \phi(w').$$

Założmy, że  $a_i, a_{i+1} \in G_{k_i}$ . Wówczas  $w' = (a_1, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_n)$ . Ponieważ  $h_{k_i}(a_i) h_{k_i}(a_{i+1}) = h_{k_i}(a_i a_{i+1})$  oraz  $h_{k_{i+1}}(a_i) h_{k_{i+1}}(a_{i+1}) = h_{k_{i+1}}(a_i a_{i+1})$ , więc

$$\phi(w) = h_{k_1}(a_1) \cdot \dots \cdot h_{k_i}(a_i) h_{k_{i+1}}(a_{i+1}) \cdot \dots \cdot h_{k_n}(a_n) = h_{k_1}(a_1) \cdot \dots \cdot h_{k_i}(a_i a_{i+1}) \cdot \dots \cdot h_{k_n}(a_n) = \phi(w').$$

Jeżeli  $w = (a_1, \dots, a_n)$  jest jakimkolwiek słowem reprezentującym  $a$ , to  $h(a) = \phi(w)$ . Ustalmy  $a, b \in G$ . Niech  $w = (a_1, \dots, a_n)$  reprezentuje  $a$ , zaś  $w' = (b_1, \dots, b_m)$  reprezentuje  $b$ . Niech  $(w, w') = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$ . Wówczas

$$h(ab) = \phi((w, w')) = \phi(w) \phi(w') = h(a) h(b).$$

□

**Definicja 2.3.** Niech  $\{G_i : i \in I\}$  będzie rodziną grup. Jeżeli  $G$  jest taką grupą a  $\{h_i : i \in I\}$  taką rodziną monomorfizmów  $h_i : G_i \rightarrow G$ ,  $i \in I$ , że  $G = \prod_{i \in I}^* h_i(G_i)$ , to  $G$  nazywamy **zewnętrznym iloczynem wolnym** grup  $\{G_i : i \in I\}$ .

**Twierdzenie 2.1.** Niech  $\{G_i : i \in I\}$  będzie rodziną grup. Wówczas istnieją grupa  $G$  i rodzina homomorfizmów  $\{h_i : i \in I\}$ ,  $h_i : G_i \rightarrow G$ ,  $i \in I$ , takie, że  $G = \prod_{i \in I}^* h_i(G_i)$ .

*Dowód.* Zastępując ewentualnie  $G_i$  przez  $G_i \times \{i\}$  możemy założyć, że  $G_i \cap G_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ . Ciąg elementów  $(a_1, \dots, a_n)$  zbioru  $\cup_{i \in I} G_i$  nazywamy słowem. Jeżeli  $a_i \in G_{k_i}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , to słowo  $(a_1, \dots, a_n)$  nazywamy zredukowanym, o ile  $k_i \neq k_{i+1}$ ,  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  lub  $a_i \neq 1$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Niech  $W$  będzie zbiorem wszystkich słów zredukowanych. Niech  $P(W)$  będzie grupą bijekcji zbioru  $W$ . Dla ustalonego  $a \in G_i \setminus \{1\}$ , dla pewnego  $i \in I$ , zdefiniujemy odwzorowanie  $\pi_a : W \rightarrow W$  wzorem:

$$\pi_a(w) = \begin{cases} (a), & \text{gdy } w = \emptyset, \\ (a, a_1, \dots, a_n), & \text{gdy } k_1 \neq i, \\ (aa_1, \dots, a_n), & \text{gdy } k_1 = i \text{ oraz } a_1 \neq a^{-1}, \\ (a_2, \dots, a_n), & \text{gdy } k_1 = i \text{ oraz } a_1 = a^{-1}, \end{cases}$$

gdzie  $w = (a_1, \dots, a_n) \in W$ ,  $a_i \in G_{k_i}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Ponadto przyjmujemy

$$\pi_1(w) = w, \text{ dla } w \in W.$$

Ponieważ  $\pi_a$  zawsze przekształca  $w$  na słowo zredukowane, więc  $\pi_a$  jest dobrze określone. Pokażemy, że jeśli  $a, b \in G_i$  oraz  $c = ab$ , to  $\pi_c = \pi_a \circ \pi_b$ .

Jeżeli  $a = 1$  lub  $b = 1$ , teza jest oczywista. Załóżmy, że  $a \neq 1$  i  $b \neq 1$ . Ustalmy  $w \in W$ . Jeżeli  $w = \emptyset$ , to  $\pi_b(w) = b$ : gdy  $c = 1$ , to  $b = a^{-1}$  i wtedy  $\pi_a\pi_b(\emptyset) = \emptyset$ , a gdy  $c \neq 1$ , to wtedy  $\pi_a\pi_b(\emptyset) = (ab) = (c) = \pi_c(\emptyset)$ . Jeżeli  $w \neq \emptyset$ , to niech  $w = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $a_i \in G_{k_i}$ . Załóżmy, że  $k_1 \neq i$ . Wówczas  $\pi_b(w) = (b, a_1, \dots, a_n)$ : gdy  $c = 1$ , to  $b = a^{-1}$  i wtedy  $\pi_1\pi_b(w) = (a_1, \dots, a_n)$  oraz  $\pi_c = id$ , a gdy  $c \neq 1$ , to  $\pi_a\pi_b(w) = (ab, a_1, \dots, a_n) = (c, a_1, \dots, a_n) = \pi_c(w)$ . Załóżmy, że  $k_1 = i$  oraz  $a_1 \neq b^{-1}$ . Wówczas  $\pi_b(w) = (ba_1, a_2, \dots, a_n)$ : gdy  $aba_1 = 1$ , to  $\pi_a\pi_b(w) = (a_2, \dots, a_n)$  oraz  $\pi_c(w) = (a_2, \dots, a_n)$ , gdyż  $ca_1 = aba_1 = 1$ , a gdy  $aba_1 \neq 1$ , to  $\pi_a\pi_b(w)(aba_1, \dots, a_n) = (ca_1, \dots, a_n) = \pi_c(w)$ . Załóżmy, że  $k_1 = i$  oraz  $a_1 = b^{-1}$ . Wówczas  $\pi_b(w) = (a_2, \dots, a_n)$  oraz

$$\pi_a\pi_b(w) = (a, a_2, \dots, a_n) = (a(ba_1), a_2, \dots, a_n) = (ca_1, \dots, a_n) = \pi_c(w).$$

Zauważmy, że  $\pi_a \in P(W)$ . Istotnie, niech  $b = a^{-1}$ . Wówczas  $\pi_b$  jest odwzorowaniem odwrotnym do  $\pi_a$ , bo:

$$\pi_b \circ \pi_a = \pi_1 = id_W \text{ oraz } \pi_a \circ \pi_b = \pi_1 = id_W.$$

Zdefiniujmy odwzorowania  $h_i : G_i \rightarrow P(W)$  wzorami  $h_i(a) = \pi_a$ . Zauważmy, że  $h_i$  jest monomorfizmem dla  $i \in I$ . Istotnie, mamy  $h_i(ab) = \pi_{ab} = \pi_a \circ \pi_b = h_i(a) \circ h_i(b)$ , więc  $h_i$  jest homomorfizmem. Ponadto, gdy  $a \neq 1$ , to  $\pi_a(\emptyset) = (a)$ , więc  $\pi_a \neq id$ , a zatem  $\ker h_i = \{1\}$ .

Niech  $G$  będzie podgrupą grupy  $P(W)$  generowaną przez grupy  $h_i(G_i)$ ,  $i \in I$ . Pozostaje wykazać, że  $G = \prod_{i \in I}^* h_i(G_i)$ . Pokażemy najpierw, że  $h_i(G_i) \cap h_j(G_j) = \{id_W\}$ , gdy  $i \neq j$ . Ustalmy  $a \in G_i$ ,  $b \in G_j$  i niech  $\pi_a \neq id_W$  oraz  $\pi_b = id_W$ . Wówczas  $\pi_a(\emptyset) = (a)$  oraz  $\pi_b(\emptyset) = (b)$ , więc  $\pi_a \neq \pi_b$ .

Niech  $w' = (\pi_{a_1}, \dots, \pi_{a_n})$  będzie niepustym zredukowanym słowem w grupach  $\{h_i(G_i) : i \in I\}$ , niech  $a_i \in G_{k_i}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Wówczas  $k_i \neq k_{i+1}$ ,  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  oraz  $a_i \neq 1$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Mamy:

$$\pi_{a_1}(\pi_{a_2}(\dots(\pi_{a_n}(\emptyset)))) = (a_1, \dots, a_n)$$

więc element reprezentowany przez  $w'$  nie jest jedyneką w  $P(W)$ , a zatem wobec Uwagi 2.2 otrzymujemy tezę.  $\square$

**Twierdzenie 2.2.** Niech  $\{G_i : i \in I\}$  będzie rodziną grup,  $H$  pewną grupą, niech  $\{\phi_i : G_i \rightarrow H : i \in I\}$  będzie rodziną homomorfizmów grup. Wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm  $\phi : \prod_{i \in I}^* G_i \rightarrow H$  taki, że

$$\phi \circ \iota_i = \phi_i,$$

dla  $i \in I$ . Innymi słowy, następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i \in I}^* G_i & \xrightarrow{\phi} & H \\ \uparrow \iota_i & \nearrow \phi_i & \\ G_i & & \end{array}$$

Ponadto jeśli grupa  $G$  ma powyższą własność, to wówczas  $G \cong \prod_{i \in I}^* G_i$ .

*Dowód.* Istnienie i jednoznaczność homomorfizmu  $\phi$  wynika z Lematu 2.1. Pokażemy, że jeśli  $G$  i  $G'$  są grupami, które wraz z rodzinami monomorfizmów  $\iota_i : G_i \rightarrow G$  i  $\iota'_i : G_i \rightarrow G'$  spełniają własność uniwersalną wypowiedzianą w twierdzeniu, to istnieje izomorfizm  $f : G \rightarrow G'$  taki, że  $f \circ \iota_i = \iota'_i$ , dla  $i \in I$ .

Istotnie, stosując własność uniwersalną dla grupy  $G$ , otrzymujemy istnienie homomorfizmu  $f : G \rightarrow G'$  takiego, że  $f \circ \iota_i = \iota'_i$ , dla  $i \in I$ , zaś stosując własność uniwersalną do grupy  $G'$  otrzymujemy istnienie homomorfizmu  $g : G' \rightarrow G$  takiego, że  $g \circ \iota'_i = \iota_i$ , dla  $i \in I$ . Tym samym  $g \circ f \circ \iota_i = \iota_i$  oraz  $f \circ g \circ \iota'_i = \iota'_i$ , dla  $i \in I$ . Ponieważ  $\iota_i$  oraz  $\iota'_i$  są monomorfizmami, więc  $f \circ g = id_{G'}$  oraz  $g \circ f = id_G$  i tym samym  $f$  jest izomorfizmem.

Na odwrót, niech  $G$  będzie grupą, która wraz z rodziną monomorfizmów  $\iota_i : G_i \rightarrow G$ ,  $i \in I$ , spełnia własność uniwersalną. Wobec Twierdzenia ?? istnieje grupa  $G'$  i rodzina monomorfizmów  $\iota'_i : G_i \rightarrow G'$  takie, że  $G' = \prod_{i \in I}^* \iota'_i(G_i)$ . Wobec udowodnionej już części twierdzenia istnieje izomorfizm  $f : G \rightarrow G'$  taki, że  $f \circ \iota_i = \iota'_i$ , dla  $i \in I$ , a zatem  $G$  jest iloczynem wolnym rodziny grup  $\{G_i : i \in I\}$ .  $\square$