

1. ZESTAW ZADAŃ 5: WOLNE GRUPY ABELOWE.

- (1) Pokazać, że dowolne dwie bazy wolnej grupy abelowej są tej samej mocy (Wskazówka: Pokazać, że dla ustalonej liczby pierwszej p i dla ustalonej wolnej grupy abelowej F podzbiór $pF = \{pf : f \in F\}$ jest wolną grupą abelową. Następnie rozważyć grupę ilorazową F/pF i działanie zewnętrzne $\cdot : \mathbb{Z}_p \times F/pF \rightarrow F/pF$ dane wzorem $x \cdot (f + pF) = xf + pF$ i sprawdzić, że z tak zdefiniowanym mnożeniem przez skalary grupa F/pF jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{Z}_p$. Wyznaczyć jej bazę i skorzystać z faktu, że dowolne dwie bazy przestrzeni liniowej są tej samej mocy).
- (2) Niech $(F, +)$ będzie wolną grupą abelową. Pokazać, że wówczas istnieje rosnący ciąg podgrup

$$\{0\} = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \dots \subsetneq N_\alpha \subsetneq \dots \subsetneq N_\gamma = F, \alpha, \gamma \in Ord$$

taki, że dla dowolnych $\alpha < \gamma$

$$N_{\alpha+1}/N_\alpha \cong \mathbb{Z}.$$

- (3) Niech A będzie grupą abelową, F wolną grupą abelową, a $h : A \rightarrow F$ homomorfizmem surjektywnym. Pokazać, że wówczas istnieje podgrupa $F' < A$ taka, że $F \cong F'$ oraz $A = F' \oplus \ker h$.
- (4) Pokazać, że koprodukt dowolnej rodziny wolnych grup abelowych jest wolną grupą abelową. Przeanalizować przykład ze strony 168 podręcznika L. Fuchs, *Infinite Abelian Groups*, Academic Press, New York, 1970, aby zobaczyć, że analogiczne twierdzenie nie jest prawdziwe dla produktu wolnych grup abelowych.
- (5) Niech G będzie skończenie generowaną grupą abelową, w której żaden element (poza 0) nie jest skończonego rzędu. Pokazać, że wówczas G jest wolną grupą abelową.
- (6) Pokazać, że addytywna grupa liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ nie jest wolna. Wywnioskować stąd, że w poprzednim zadaniu nie można pominąć założenia o skończonej generowalności G .

Zadanie domowe: zadania 1, 2 i 3 należy rozwiązać na następne zajęcia.