

1. ZESTAW ZADAŃ 4: PRODUKTY GRUP. PRODUKTY I KOPRODUKTY GRUP ABELOWYCH.
PRODUKTY I KOPRODUKTY MODUŁÓW.

- (1) Niech $\{G_i : i \in I\}$ będzie rodziną (możliwie nieskończoną) grup, niech

$$\prod_{i \in I} G_i = \{f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i : f(i) \in G_i\}$$

będzie produktem kartezjańskim rodziny zbiorów $\{G_i : i \in I\}$. Jeżeli $f, g \in \prod_{i \in I} G_i$, to iloczyn $f \cdot g$ definiujemy jako funkcję $f \cdot g : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i$ daną wzorem

$$f \cdot g(i) = f(i)g(i).$$

Pokazać, że $(\prod_{i \in I} G_i, \cdot)$ jest grupą, którą nazywamy **iloczynem prostym zewnętrznym**.

Ponadto definiujemy odwzorowania $\pi_i : \prod_{i \in I} G_i \rightarrow G_i$ wzorem

$$\pi_i(a) = a(i),$$

dla $i \in I$. Pokazać, że $\pi_i, i \in I$, są dobrze określonymi epimorfizmami grup, które nazywamy **epimorfizmami kanonicznymi**.

- (2) Niech $\{G_i : i \in I\}$ będzie rodziną (możliwie nieskończoną) grup, niech

$$\prod_{i \in I} G_i = \{f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i : f(i) \in G_i\}$$

będzie produktem kartezjańskim rodziny zbiorów $\{G_i : i \in I\}$. W zbiorze $\prod_{i \in I} G_i$ rozpatrzmy podzbiór

$$\prod_{i \in I}^w G_i = \{f \in \prod_{i \in I} G_i : f(i) = 1_{G_i} \text{ dla prawie wszystkich } i \in I\}.$$

Iloczyn $f \cdot g$, dla $f, g \in \prod_{i \in I}^w G_i$ definiujemy jak w grupie $\prod_{i \in I} G_i$. Pokazać, że $(\prod_{i \in I}^w G_i, \cdot)$ jest grupą, którą nazywamy **słabym iloczynem prostym zewnętrznym**. W przypadku, gdy grupy $G_i, i \in I$, są abelowe, piszemy na ogół $\prod_{i \in I} G_i$, a w przypadku, gdy $G_i, i \in I$, są abelowe i zapisane w notacji addytywnej, piszemy na ogół $\sum_{i \in I} G_i$.

Ponadto definiujemy odwzorowania $\iota_i : G_i \rightarrow \prod_{i \in I}^w G_i$ wzorem

$$\pi_i(a) = \bar{a}, \text{ gdzie } \bar{a}(j) = \begin{cases} a, & \text{gdy } j = i, \\ 1_{G_j}, & \text{gdy } j \neq i, \end{cases}$$

dla $i \in I$. Pokazać, że $\iota_i, i \in I$, są dobrze określonymi monomorfizmami grup, które nazywamy **monomorfizmami kanonicznymi**.

- (3) Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, niech $\{H_i : i \in I\}$ będzie rodziną (możliwie nieskończoną) podgrup normalnych grup G . Pokazać, że następujące warunki są równoważne:

(a) $G = \prod_{i \in I}^w G_i$,

(b) każdy element $g \in G \setminus \{1\}$ ma jednoznaczne przedstawienie w postaci

$$g = h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_n},$$

gdzie $i_1, \dots, i_n$ są różnymi elementami zbioru I oraz $h_{i_k} \neq 1, k \in \{1, \dots, n\}$.

- (4) Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, niech $\{H_i : i \in I\}$ będzie rodziną (możliwie nieskończoną) podgrup normalnych grup G . Wówczas, jeżeli

(a) $G = \langle \bigcup_{i \in I} H_i \rangle$ oraz

(b) dla każdego $k \in I, N_k \cap \langle \bigcup_{i \in I \setminus \{k\}} H_i \rangle,$

to $G \cong \prod_{i \in I}^w H_i$.

- (5) Niech $\{G_i : i \in I\}$ będzie rodziną grup, H pewną grupą, niech $\{\phi_i : H \rightarrow G_i : i \in I\}$ będzie rodziną homomorfizmów grup. Pokazać, że wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\phi : H \rightarrow \prod_{i \in I} G_i$ taki, że

$$\pi_i \circ \phi = \phi_i,$$

dla $i \in I$. Ponadto pokazać, że jeśli grupa G ma powyższą własność, to wówczas $G \cong \prod_{i \in I} G_i$.

- (6) Niech $\{G_i : i \in I\}$ będzie rodziną grup abelowych, H pewną grupą abelową, niech $\{\phi_i : G_i \rightarrow H : i \in I\}$ będzie rodziną homomorfizmów grup. Pokazać, że wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\phi : \prod_{i \in I} G_i \rightarrow H$ taki, że

$$\phi \circ \iota_i = \phi_i,$$

dla $i \in I$. Ponadto pokazać, że jeśli grupa abelowa G ma powyższą własność, to wówczas $G \cong \prod_{i \in I} G_i$.

- (7) Pokazać, że powyższe twierdzenie jest fałszywe, jeśli rozważane grupy nie są abelowe (wskazówka: wystarczy ograniczyć się do przypadku rodziny dwóch grup nieabelowych).
 (8) Niech R będzie pierścieniem, niech $\{M_i : i \in I\}$ będzie rodziną (możliwie nieskończoną) lewych R -modułów, niech $\prod_{i \in I} M_i$ będzie produktem rodziny grup abelowych $\{M_i : i \in I\}$. Jeżeli $a \in R$ oraz $m \in \prod_{i \in I} M_i$, to iloczyn $a \cdot m$ definiujemy jako funkcję $a \cdot m : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} M_i$ daną wzorem

$$a \cdot m(i) = am(i).$$

Pokazać, że $(\prod_{i \in I} M_i, \cdot)$ jest lewym R -modulem, który nazywamy **produktem modułów**.

Ponadto definiujemy odwzorowania $\pi_i : \prod_{i \in I} M_i \rightarrow M_i$ wzorem

$$\pi_i(m) = m(i),$$

dla $i \in I$. Pokazać, że $\pi_i, i \in I$, są dobrze określonymi epimorfizmami modułów, które nazywamy **epimorfizmami kanonicznymi**.

- (9) Niech R będzie pierścieniem, niech $\{M_i : i \in I\}$ będzie rodziną (możliwie nieskończoną) lewych R -modułów, niech $\sum_{i \in I} M_i$ będzie koproduktem rodziny grup abelowych $\{M_i : i \in I\}$. Jeżeli $a \in R$ oraz $m \in \sum_{i \in I} M_i$, to iloczyn $a \cdot m$ definiujemy jako funkcję $a \cdot m : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} M_i$ daną wzorem

$$a \cdot m(i) = am(i).$$

Pokazać, że $(\sum_{i \in I} M_i, \cdot)$ jest lewym R -modulem, który nazywamy **koproduktem** (lub **sumą**) **modułów**.

Ponadto definiujemy odwzorowania $\iota_i : M_i \rightarrow \sum_{i \in I}^w M_i$ wzorem

$$\iota_i(m) = \overline{m}, \text{ gdzie } \overline{m}(j) = \begin{cases} m, & \text{gdy } j = i, \\ 0_{M_j}, & \text{gdy } j \neq i, \end{cases}$$

dla $i \in I$. Pokazać, że $\iota_i, i \in I$, są dobrze określonymi monomorfizmami modułów, które nazywamy **monomorfizmami kanonicznymi**.

- (10) Niech R będzie pierścieniem, niech $\{M_i : i \in I\}$ będzie rodziną lewych R -modułów, N pewnym lewym R -modulem, niech $\{\phi_i : N \rightarrow M_i : i \in I\}$ będzie rodziną homomorfizmów modułów. Pokazać, że wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\phi : N \rightarrow \prod_{i \in I} M_i$ taki, że

$$\pi_i \circ \phi = \phi_i,$$

dla $i \in I$. Innymi słowy, następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\phi} & \prod_{i \in I} M_i \\ & \searrow \phi_i & \downarrow \pi_i \\ & & M_i \end{array}$$

Ponadto pokazać, że jeśli moduł M ma powyższą własność, to wówczas $M \cong \prod_{i \in I} M_i$.

- (11) Niech R będzie pierścieniem, niech $\{M_i : i \in I\}$ będzie rodziną lewych R -modułów, N pewnym lewym R -modułem, niech $\{\phi_i : M_i \rightarrow N : i \in I\}$ będzie rodziną homomorfizmów modułów. Pokazać, że wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\phi : \sum_{i \in I} M_i \rightarrow N$ taki, że

$$\phi \circ \iota_i = \phi_i,$$

dla $i \in I$. Innymi słowy, następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} \sum_{i \in I} M_i & \xrightarrow{\phi} & N \\ \uparrow \iota_i & \nearrow \phi_i & \\ M_i & & \end{array}$$

Ponadto pokazać, że jeśli moduł M ma powyższą własność, to wówczas $M \cong \sum_{i \in I} M_i$.

Zadanie domowe: zadania 7, 10 i 11 należy rozwiązać na następne zajęcia.