

1. ZESTAW ZADAŃ 3: CIĄGI DOKŁADNE.

- (1) Niech R będzie pierścieniem. Udowodnić, że ciąg lewych R -modułów i homomorfizmów

$$0 \rightarrow N_1 \xrightarrow{f} N_2 \xrightarrow{g} N_3$$

jest dokładny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego lewego R -modułu M ciąg:

$$\operatorname{Hom}_R(M, N_1) \xrightarrow{\bar{f}} \operatorname{Hom}_R(M, N_2) \xrightarrow{\bar{g}} \operatorname{Hom}_R(M, N_3) \rightarrow 0$$

jest ciągiem dokładnym grup abelowych, gdzie odwzorowania $\bar{f} : \operatorname{Hom}_R(M, N_1) \rightarrow \operatorname{Hom}_R(M, N_2)$ i $\bar{g} : \operatorname{Hom}_R(M, N_2) \rightarrow \operatorname{Hom}_R(M, N_3)$ dane są wzorami

$$\bar{f}(\phi) = f \circ \phi \text{ oraz } \bar{g}(\psi) = g \circ \psi.$$

- (2) Niech R będzie pierścieniem. Udowodnić, że jeżeli w diagramie przemiennym

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 & \xrightarrow{g} & M_3 \\ & & & & \downarrow v & & \downarrow w \\ 0 & \longrightarrow & N_1 & \xrightarrow{f'} & N_2 & \xrightarrow{g'} & N_3 \end{array}$$

wiersze są ciągami dokładnymi, to istnieje dokładnie jeden homomorfizm $u : M_1 \rightarrow N_1$ taki, że diagram

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 & \xrightarrow{g} & M_3 \\ & & \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w \\ 0 & \longrightarrow & N_1 & \xrightarrow{f'} & N_2 & \xrightarrow{g'} & N_3 \end{array}$$

jest przemienny.

- (3) Niech R będzie pierścieniem, niech w diagramie przemiennym

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 & \xrightarrow{g} & M_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \\ 0 & \longrightarrow & N_1 & \xrightarrow{f'} & N_2 & \xrightarrow{g'} & N_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

wiersze będą ciągami dokładnymi. Udowodnić, że jeżeli u i w są surjekcjami, to wówczas również v jest surjekcją.

Zadanie domowe: zadania 1, 2 i 3 należy rozwiązać na następne zajęcia.