

1. ZESTAW ZADAŃ 2: HOMOMORFIZMY MODUŁÓW. MODUŁ ILORAZOWY, TWIERDZENIE O HOMOMORFIZMIE.

- (1) Pokazać, że homomorfizm modułów jest różnowartościowy wtedy i tylko wtedy, gdy jest homomorfizmem kategorijskim.
- (2) Niech R będzie pierścieniem, M, N lewymi R -modułami, $\phi : M \rightarrow N$ homomorfizmem modułów, niech $M_1 < M$, $N_1 < N$. Pokazać, że wówczas:
- $\phi(M_1) < N$;
 - $\phi^{-1}(N_1) < M$.
- (3) Niech R będzie pierścieniem, M, N lewymi R -modułami, $\pi : M \rightarrow N$ homomorfizmem surjektywnym modułów i niech $K = \ker \pi$. Oznaczmy

$$\mathcal{M} = \{M_1 : M_1 < M \text{ oraz } K \subset M_1\}, \mathcal{N} = \{N_1 : N_1 < N\}.$$

Pokazać, że wówczas odwzorowania

$$\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}, \phi(M_1) = \pi(M_1),$$

$$\psi : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}, \psi(N_1) = \pi^{-1}(N_1)1$$

są wzajemnie odwrotne.

- (4) Niech R będzie pierścieniem, M lewym R -modułem, $N < M$. Oznaczmy

$$m + N = \{m + n : n \in N\},$$

$$M/N = \{m + N : m \in M\}$$

i w zbiorze M/N określmy działania dodawania i mnożenia zewnętrznego:

$$(m_1 + N) + (m_2 + N) = (m_1 + m_2) + N,$$

$$a(m + N) = am + N.$$

Pokazać, że wówczas M/N jest lewym R -modułem.

- (5) Niech R będzie pierścieniem, M lewym R -modułem, $N \subset M$. Pokazać, że wówczas $N < M$ wtedy i tylko wtedy, gdy N jest jądrem pewnego homomorfizmu.
- (6) Niech R będzie pierścieniem, M, N_1, N_2 lewymi R -modułami, $\phi_1 : M \rightarrow N_1$ homomorfizmem surjektywnym, $\phi_2 : M \rightarrow N_2$ homomorfizmem.
- Pokazać, że jeśli istnieje homomorfizm $\psi : N_1 \rightarrow N_2$ taki, że $\psi \circ \phi_1 = \phi_2$, to $\ker \phi_1 \subset \ker \phi_2$.
 - Pokazać, że jeśli $\ker \phi_1 \subset \ker \phi_2$, to istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\psi : N_1 \rightarrow N_2$ taki, że $\psi \circ \phi_1 = \phi_2$. Ponadto wówczas $\operatorname{im} \psi = \operatorname{im} \phi_2$ oraz $\ker \psi = \phi_1(\ker \phi_2)$.

Inaczej: diagram

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ \phi_1 \swarrow & & \searrow \phi_2 \\ N_1 & \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} & N_2 \\ & \psi & \end{array}$$

jest przemienny.

- (7) Niech R będzie pierścieniem, M lewym R -modułem, $N_1, N_2 < M$. Pokazać, że wówczas

$$N_1/N_1 \cap N_2 \cong (N_1 + N_2)/N_2.$$

- (8) Niech R będzie pierścieniem, M lewym R -modułem, $N_1, N_2 < M$, $N_1 \subset N_2$. Pokazać, że wówczas

$$M/N_2 \cong (M/N_1)/(N_2/N_1).$$

- (9) Niech R będzie pierścieniem z jedynką, M lewym unitarnym R -modułem cyklicznym. Pokazać, że wówczas $M \cong R/I$, gdzie $I \triangleleft R$ jest pewnym ideałem lewostronnym.

Zadanie domowe: zadania 1, 2 i 3 należy rozwiązać na następne zajęcia.