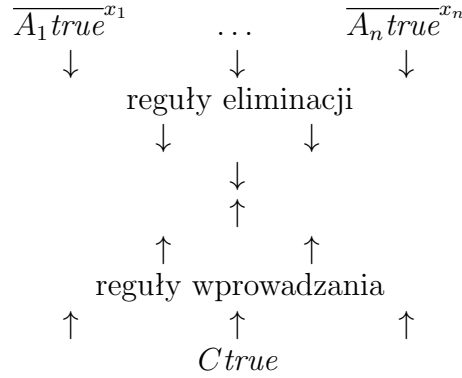


6. WYKŁAD 6: DOWODY NORMALNE. NORMALIZACJA. DŁUGIE DOWODY NORMALNE.

6.1. Dowody normalne. Zauważyliśmy, że dowody zawierające "objazd", a więc regułę wprowadzania, która bezpośrednio poprzedza odpowiadającą jej regułę eliminacji, może być zamieniony na inny dowód po zastosowaniu lokalnej redukcji. Okazuje się, że dla każdego dowodu osądu $Atrue$ istnieje ciąg lokalnych redukcji, który prowadzi do innego dowodu $Atrue$ nie zawierającego takich "objazdów" (mowa o twierdzeniu normalizacyjnym). Dowód otrzymany w rezultacie zastosowania takiej procedury nazywamy **dowodem normalnym**. Dowód normalny jest zatem możliwie najbardziej bezpośrednim dowodem, jako że każde zastosowanie "objazdu" może być interpretowane jako przykład rozumowania, które nie jest bezpośrednie. Ponadto dowód taki jest w pewnym sensie (niezależnym od wielkości jego syntaktycznej reprezentacji) minimalny, nie redukuje się bowiem do innego dowodu.

Jako że dowód normalny nie zawiera "objazdu", można go zapisać w następującej postaci, gdzie zapisywane od góry do dołu reguły eliminacji spotykają się w środku z zapisywanymi od dołu do góry regułami wprowadzania:



Tym samym struktura dowodu normalnego odpowiada naszej intuicji budowania dowodu poprzez kolejne zastosowania reguł wprowadzania od dołu do góry, dodania nowych hipotez, a następnie kolejnego zastosowania reguł eliminacji od góry do dołu, startując od hipotez. Oto przykład dowodu normalnego osądu $(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)true$:

$$\frac{\frac{\frac{\overline{A \wedge Btrue}^x}{Btrue} \wedge E_R \quad \frac{\overline{A \wedge Btrue}^x}{Atrue} \wedge E_L}{B \wedge Atrue} \wedge I}{(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)true} \rightarrow I^x$$

Dla kontrastu następujący dowód $(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)true$ nie jest normalny, zawiera bowiem "objazdy":

$$\frac{\frac{\frac{\overline{A \wedge Btrue}^x}{Atrue} \wedge E_L \quad \frac{\overline{A \wedge Btrue}^x}{Btrue} \wedge E_R}{A \wedge Btrue} \wedge I \text{ ("objazd")} \quad \frac{\frac{\overline{A \wedge Btrue}^x}{Atrue} \wedge E_L \quad \frac{\overline{A \wedge Btrue}^x}{Btrue} \wedge E_R}{A \wedge Btrue} \wedge I \text{ ("objazd")}}{\frac{\frac{A \wedge Btrue}{Btrue} \wedge E_R \quad \frac{A \wedge Btrue}{Atrue} \wedge E_R}{B \wedge Atrue} \wedge I}{(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)true} \rightarrow I^x$$

Dowody normalne są trudnym do przecenienia narzędziem w studiowaniu logiki z uwagi na ich własności niesprzeczności i zupełności: osąd $Atrue$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dowód normalny $Atrue$. Własność niesprzeczności jest tu spełniona trywialnie, jako że dowód normalny jest tylko dowodem w pewnej szczególnej postaci. Własność zupełności (orzekająca, iż każdy dowód ma odpowiadający mu dowód normalny) pociąga za sobą dwie ważne konsekwencje. Po pierwsze, aby udowodnić $Atrue$,

wystarczy znaleźć dowód normalny. Dowodząc A_{true} bezpiecznie jest, na przykład, pominąć dowody następującej postaci, które nie mogą być dowodami normalnymi:

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ B \rightarrow A_{true} \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ B_{true} \end{array}}{A_{true}} \rightarrow E$$

Innymi słowy, wystarczy, że skupimy się na możliwie najbardziej bezpośrednim dowodzie zamiast na dowodzie mniej bezpośrednim, który, na przykład tak jak powyższy dowód, wprowadza dodatkowe zdanie B . Po drugie, chcąc odrzucić osąd A_{true} , wystarczy spróbować zbudować jego dowód normalny (próbując na zmianę stosować od dołu do góry reguły wprowadzania i od góry do dołu reguły eliminacji) i pokazać, że proces konstrukcji zaczyna się lub nie może się zakończyć.

Zadanie 11. *Podać nieformalne uzasadnienie dlaczego osąd $\neg\neg A \rightarrow A_{true}$ nie jest dowodliwy.*

Chcąc sformalizować to, co powyżej, wprowadzamy dwa nowe rodzaje osądów: **osądy neutralne** $A \downarrow$ oraz **osądy normalne** $A \uparrow$. Osąd neutralny $A \downarrow$ zostaje udowodniony za pomocą **dowodu neutralnego** osądu A_{true} , który jest albo hipotezą, albo regułą eliminacji zastosowaną do innego dowodu neutralnego, podczas gdy osąd normalny $A \uparrow$ zostaje udowodniony za pomocą dowodu normalnego osądu A_{true} , który jest albo innym osądem neutralnym, albo regułą wprowadzenia zastosowaną do innego dowodu normalnego. Tym samym kierunek strzałki w każdym z osądów zgadza się z kierunkiem, w jakim powinien być konstruowany dowód. W szczególności będziemy wykorzystywać istniejący osąd neutralny $A \downarrow$ celem wydedukowania innego osądu poprzez zadecydowanie, którą regułą eliminacji można zastosować; tym samym konstrukcja dowodu z osądu neutralnego zawsze odbywa się od góry do dołu ($\downarrow$). Dla osądu normalnego $A \uparrow$ którego dowód jeszcze nie jest kompletny, będziemy decydować, którą regułą wprowadzania musimy zastosować celem jego wydedukowania; tym samym konstrukcja dowodu z osądu normalnego zawsze odbywa się od dołu do góry ($\uparrow$). Gdy osąd neutralny $A \downarrow$ "spotka się" z osądem normalnym $A \uparrow$ w środku, konstrukcja dowodu jest zakończona.

Reguły wnioskowania dla osądów neutralnych i normalnych są następujące:

$$\begin{array}{c} \overline{A \downarrow}^x \\ \vdots \\ \frac{B \uparrow}{A \rightarrow B} \rightarrow I_{\uparrow}^x \quad \frac{A \rightarrow B \downarrow \quad A \uparrow}{B \downarrow} \rightarrow E_{\downarrow} \quad \frac{A \uparrow \quad B \uparrow}{A \wedge B \uparrow} \wedge I_{\uparrow} \quad \frac{A \wedge B \downarrow}{A \downarrow} \wedge E_{L\downarrow} \quad \frac{A \wedge B \downarrow}{B \downarrow} \wedge E_{R\downarrow} \\ \\ \frac{A \uparrow}{A \vee B \uparrow} \vee I_{L\uparrow} \quad \frac{B \uparrow}{A \vee B \uparrow} \vee I_{R\uparrow} \quad \frac{\overline{A \downarrow}^x \quad \overline{B \downarrow}^y}{A \vee B \downarrow} \vee E_{\uparrow}^{x,y} \\ \\ \frac{}{\top \uparrow} \top I_{\uparrow} \quad \frac{\perp \downarrow}{C \uparrow} \perp E_{\uparrow} \quad \frac{A \downarrow}{A \uparrow} \downarrow \uparrow \quad \frac{\perp \uparrow}{\neg A \uparrow} \neg I_{\uparrow}^x \quad \frac{\neg A \downarrow \quad A \uparrow}{\perp \downarrow} \neg E_{\downarrow} \end{array}$$

Reguła $\downarrow \uparrow$, zwana **regułą przymuszania**, orzeka, iż każdy dowód neutralny jest normalny, zaś typowa konstrukcja dowodu normalnego kończy się zastosowaniem reguły $\downarrow \uparrow$. Wszystkie pozostałe reguły są zaprojektowane zgodnie z naszą intuicją dotyczącą budowy możliwie najbardziej bezpośrednich dowodów

i tym samym najwygodniej jest je czytać zgodnie ze zwrotem strzałki w każdym z osądów. Na przykład, założmy, że chcielibyśmy zbudować $(\uparrow)$ nowy dowód $A \rightarrow Btrue$:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ A \rightarrow B \uparrow \end{array}$$

Chcąc zbudować możliwie najprostszy dowód $A \rightarrow Btrue$, zaczynamy od postawienia hipotezy $Atrue$, która następnie będzie wykorzystywana $(\downarrow)$ w dedukcji kolejnego osądu:

$$\begin{array}{c} \overline{A \downarrow} \\ \vdots \\ A \rightarrow B \uparrow \end{array}$$

W dalszym ciągu będziemy próbowali zbudować $(\uparrow)$ dowód $Btrue$, a więc dokładnie to, co wyraża reguła $\rightarrow I_{\uparrow}$:

$$\frac{\begin{array}{c} \overline{A \downarrow} \\ \vdots \\ B \uparrow \end{array}}{A \rightarrow B \uparrow}$$

Jako kolejny przykład przypuśćmy, że chcielibyśmy wykorzystać $(\downarrow)$ istniejący dowód osądu $A \rightarrow Btrue$:

$$\begin{array}{c} A \rightarrow B \downarrow \\ \vdots \end{array}$$

Chcąc wykorzystać go w możliwie najbardziej bezpośredni sposób, potrzebny nam będzie dowód $Atrue$, którego na tym etapie nie mamy do dyspozycji. Wobec tego najpierw budujemy $(\uparrow)$ nowy dowód $Atrue$:

$$\begin{array}{c} A \rightarrow B \downarrow \quad A \uparrow \\ \vdots \end{array}$$

Dowód $Atrue$ umożliwia nam teraz wywnioskowanie $Btrue$. Jako że mamy teraz do dyspozycji dowód $Btrue$ gotowy do użycia przy dedukowaniu innego osądu, klasyfikujemy go jako osąd neutralny, co jest dokładnie tym, co wyraża reguła $\rightarrow E_{\downarrow}$:

$$\frac{A \rightarrow B \downarrow \quad A \rightarrow}{B \downarrow}$$

Zadanie 12. Przeanalizuj wszystkie pozostałe reguły w podobny sposób. Zauważ, że reguła $\vee E_{\uparrow}$ wyprowadza osąd normalny $C \uparrow$ poprzez zastosowanie reguły eliminacji, tym samym przecząc naszej intuicji dotyczącej osądów normalnych, zgodnie z którą osąd normalny powinien być albo osądem neutralnym, albo regułą wprowadzania zastosowaną do innego osądu normalnego. Istota dowodu $C \uparrow$ jest jakkolwiek do odczytania nie w zastosowaniu reguły $\vee E_{\uparrow}$, ale w dwóch przesłankach pozwalających wydedukować $C \uparrow$. Tym samym reguła $\vee E_{\uparrow}$ w dalszym ciągu przystaje do naszej intuicji dotyczącej osądów normalnych. Reguły $\top I_{\uparrow}$ oraz $\perp E_{\uparrow}$ otrzymujemy jako zerowe przypadki reguł $\wedge I_{\uparrow}$ oraz $\vee E_{\uparrow}$, odpowiednio.

Podane powyżej reguły są zaprojektowane w taki sposób, aby dowód neutralnego lub normalnego osądu nie zawierał żadnych "objazdów". Zauważmy po pierwsze, że żaden dowód osądu neutralnego nie kończy się zastosowaniem reguły wprowadzania (porównaj reguły $\rightarrow E_{\downarrow}$, $\wedge E_{L\downarrow}$, $\wedge E_{R\downarrow}$). Następnie zauważmy, że główną przesłanką w każdej z reguł eliminacji jest osąd neutralny (na przykład $A \rightarrow B \downarrow$

w regule $\rightarrow E_{\downarrow}$), o którym z kolei pokazaliśmy, że nie kończy się regułą wprowadzania i tym samym nie może prowadzić do możliwego "objazdu".

Jako przykład pokażemy, że podany wcześniej dowód osądu $(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)_{true}$ jest istotnie dowodem normalnym, przepisując go w tym celu z zastosowaniem osądów neutralnych i normalnych; oznaczmy każdy z osądów w dowodzie przez $\uparrow$ lub przez $\downarrow$ i sprawdzimy, że nie powoduje to konfliktów w oznaczeniach:

$$\frac{\frac{\frac{\overline{A \wedge B \downarrow}^x}{B \downarrow} \wedge E_{R\downarrow} \quad \frac{\overline{A \wedge B \downarrow}^x}{A \downarrow} \wedge E_{L\downarrow}}{B \uparrow} \downarrow \uparrow \quad \frac{A \downarrow}{A \uparrow} \downarrow \uparrow}{\frac{B \wedge A \uparrow}{(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A) \uparrow} \rightarrow I_{\uparrow}^x}$$

Zauważmy, że nie da się oznaczyć "objazdu" za pomocą strzałek $\downarrow$ lub $\uparrow$:

$$\frac{\frac{\frac{A \uparrow \quad B \uparrow}{A \wedge B \uparrow? \downarrow?} \wedge I_{\uparrow}}{A \downarrow} \wedge E_{L\downarrow} \quad \frac{\frac{\overline{A \downarrow}^x \quad \vdots \quad B \uparrow}{A \rightarrow B \uparrow? \downarrow?} \rightarrow I_{\uparrow}^x A \uparrow}{B \downarrow} \rightarrow E_{\downarrow} \quad \frac{\frac{A \uparrow}{A \vee B \uparrow? \downarrow?} \vee I_{L\uparrow} \quad \frac{\overline{A \downarrow}^x \quad \overline{B \downarrow}^y}{\vdots \quad \vdots} \vee E_{\uparrow}^{x,y}}{C \uparrow} \vee E_{\uparrow}^{x,y}$$

Jako kolejny przykład pokażemy, że nie istnieje dowód $A \vee \neg A \uparrow$, gdzie A jest dowolnym zdaniem:

$$\frac{\text{tu się zatniemy} \quad \frac{A \uparrow}{A \vee \neg A \uparrow} \vee I_{L\uparrow} \quad \frac{\frac{\overline{A \downarrow}^x}{\text{tu się zatniemy}} \quad \frac{\perp \uparrow}{\neg A \uparrow} \rightarrow I_{\uparrow}^x}{A \vee \neg A \uparrow} \vee I_{R\uparrow}$$

W szczególności $A \vee \neg A_{true}$ nie jest dowodliwy w logice konstruktywistycznej, aczkolwiek jest to tautologia w logice klasycznej.

Reguły wnioskowania dla osądów neutralnych i normalnych z użyciem osądów hipotetycznych $\Gamma_{\downarrow} \vdash A \uparrow$ oraz $\Gamma_{\downarrow} \vdash A \downarrow$, gdzie $\Gamma_{\downarrow} = \{A \downarrow : A \in \Gamma\}$ jest zbiorem osądów neutralnych i gdzie reguła wymiany jest wbudowana, są następujące:

$$\begin{array}{c} \frac{}{\Gamma_{\downarrow}, A \downarrow \vdash A \downarrow} \text{Hyp}_{\downarrow} \quad \frac{\Gamma_{\downarrow}, A \downarrow \vdash B \uparrow}{\Gamma_{\downarrow} \vdash A \rightarrow B} \rightarrow I_{\uparrow} \quad \frac{\Gamma_{\downarrow} \vdash A \rightarrow B \downarrow \quad \Gamma_{\downarrow} \vdash A \uparrow}{\Gamma_{\downarrow} \vdash B \downarrow} \rightarrow E_{\downarrow} \\ \frac{\Gamma_{\downarrow} \vdash A \uparrow \quad \Gamma_{\downarrow} \vdash B \uparrow}{\Gamma_{\downarrow} \vdash A \wedge B \uparrow} \wedge I_{\uparrow} \quad \frac{\Gamma_{\downarrow} \vdash A \wedge B \downarrow}{\Gamma_{\downarrow} \vdash A \downarrow} \wedge E_{L\downarrow} \quad \frac{\Gamma_{\downarrow} \vdash A \wedge B \downarrow}{\Gamma_{\downarrow} \vdash B \downarrow} \wedge E_{R\downarrow} \\ \frac{\Gamma_{\downarrow} \vdash A \uparrow}{\Gamma_{\downarrow} \vdash A \vee B \uparrow} \vee I_{L\uparrow} \quad \frac{\Gamma_{\downarrow} \vdash B \uparrow}{\Gamma_{\downarrow} \vdash A \vee B \uparrow} \vee I_{R\uparrow} \quad \frac{\Gamma_{\downarrow} \vdash A \vee B \downarrow \quad \Gamma_{\downarrow}, A \downarrow \vdash C \uparrow \quad \Gamma_{\downarrow}, B \downarrow \vdash C \uparrow}{\Gamma_{\downarrow} \vdash C \uparrow} \vee E_{\uparrow} \\ \frac{}{\Gamma_{\downarrow} \vdash \top \uparrow} \top I_{\uparrow} \quad \frac{\Gamma_{\downarrow} \vdash \perp \downarrow}{\Gamma_{\downarrow} \vdash C \uparrow} \perp E_{\uparrow} \quad \frac{\Gamma_{\downarrow} \vdash A \downarrow}{\Gamma_{\downarrow} \vdash A \uparrow} \downarrow \uparrow \quad \frac{\Gamma_{\downarrow}, A \downarrow \vdash \perp \uparrow}{\Gamma_{\downarrow} \vdash \neg A \uparrow} \neg I_{\uparrow} \quad \frac{\Gamma_{\downarrow} \vdash \neg A \downarrow \quad \Gamma_{\downarrow} \vdash A \uparrow}{\Gamma_{\downarrow} \vdash \perp \downarrow} \neg E_{\downarrow} \end{array}$$

Zasady osłabiania i ściągania formułujemy tak, jak się tego można spodziewać. Jako że system bazuje na osądach hipotetycznych, spełnia też zasadę podstawiania.

Twierdzenie 9 (własności strukturalne).

- (1) (*Oslabianie*). Jeżeli $\Gamma_{\downarrow} \vdash C \downarrow$, to wówczas $\Gamma_{\downarrow}, A \Downarrow \vdash C \downarrow$.
Jeżeli $\Gamma_{\downarrow} \vdash C \uparrow$, to wówczas $\Gamma_{\downarrow}, A \Downarrow \vdash C \uparrow$.
- (2) (*Ściąganie*). Jeżeli $\Gamma_{\downarrow}, A \downarrow, A \Downarrow \vdash C \downarrow$, to wówczas $\Gamma_{\downarrow}, A \Downarrow \vdash C \downarrow$.
Jeżeli $\Gamma_{\downarrow}, A \downarrow, A \Downarrow \vdash C \uparrow$, to wówczas $\Gamma_{\downarrow}, A \Downarrow \vdash C \uparrow$.

Twierdzenie 10. (*Podstawianie*.) Jeżeli $\Gamma_{\downarrow} \vdash A \downarrow$ oraz $\Gamma_{\downarrow}, A \Downarrow \vdash C \downarrow$, to wówczas $\Gamma_{\downarrow} \vdash C \downarrow$.
Jeżeli $\Gamma_{\downarrow} \vdash A \downarrow$ oraz $\Gamma_{\downarrow}, A \Downarrow \vdash C \uparrow$, to wówczas $\Gamma_{\downarrow} \vdash C \uparrow$.

Dowody prowadzimy przez indukcję względem struktury dowodów $\Gamma_{\downarrow}, A \Downarrow \vdash C \downarrow$ oraz $\Gamma_{\downarrow}, A \Downarrow \vdash C \uparrow$.

6.2. Normalizacja. Zasady niesprzeczności i zupełności dla dowodów normalnych z użyciem osądów normalnych wyglądają następująco:

Twierdzenie 11.

- (1) (*Niesprzeczność*). Jeżeli $A \uparrow$ jest dowodliwe, to wówczas A_{true} jest dowodliwe.
- (2) (*Zupełność*). Jeżeli A_{true} jest dowodliwe, to wówczas $A \uparrow$ jest dowodliwe.

Dowód niesprzeczności jest prosty, jako że każda reguła wnioskowania dla osądów neutralnych i normalnych daje się przerobić na odpowiadającą jej regułę wnioskowania poprzez zastąpienie osądów neutralnych i normalnych osądami o prawdzie (na przykład $A \uparrow$ i $A \downarrow$ zamienia się na A_{true}). W połączeniu z tym, że dowód osądu neutralnego bądź normalnego nie zawiera "objazdów", pociąga to, że $A \uparrow$ wyraża szczególną strategię dowodu A_{true} , a mianowicie strategię, która nie pozwala na stosowanie objazdów. Jeśli chodzi o własność zupełności, udowodnimy za chwilę twierdzenie normalizacyjne; w dowodzie pominiemy przypadek alternatywy $\vee$ oraz fałsz $\perp$.

Twierdzenie 12 (twierdzenie normalizacyjne). *Dla każdego dowodu A_{true} istnieje ciąg lokalnych redukcji prowadzący do dowodu $A \uparrow$. Innymi słowy, dowód A_{true} otrzymany po zastosowaniu ciągu lokalnych redukcji może być etykietowany strzałkami $\downarrow$ i $\uparrow$ zgodnie z regułami wnioskowania dla osądów neutralnych i normalnych.*

Inny rezultat, zwany silnym twierdzeniem normalizacyjnym, orzeka, iż każdy ciąg lokalnych redukcji, niezależnie od ich kolejności, prędzej czy później daje dowód normalny:

Twierdzenie 13 (silne twierdzenie normalizacyjne). *Każdy ciąg lokalnych redukcji rozpoczynający się od dowodu A_{true} kończy się na dowodzie $A \uparrow$. Innymi słowy, nie istnieje nieskończony ciąg lokalnych redukcji zaczynający się od dowolnego dowodu A_{true} .*

Okazuje się, że jeśli wzbogacimy nasz system logiczny o alternatywę $\vee$ oraz fałsz $\perp$ (a więc jeśli będziemy rozważać pełny system logiki zdań), twierdzenie normalizacyjne nie będzie prawdziwe. Innymi słowy, dowód, do którego nie daje się już zastosować lokalnej redukcji, niekoniecznie jest dowodem normalnym (rezultat odwrotny, orzekający, iż dowód normalny nie zawiera "objazdów", dalej jest prawdziwy). Na przykład, następujący dowód $(A \vee A) \rightarrow true$ nie jest normalny, albowiem oznaczając każdy z jego osądów przez strzałki $\downarrow$ bądź $\uparrow$ nie będzie działało dla wniosku z reguły $\vee E^{x,y}$; tu i w dalszej części wykładu

będziemy skracali zapis $\frac{A \downarrow}{A \uparrow} \Downarrow$ do $\Downarrow$:

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\overline{A \vee Atrue}^z}{\overline{A \vee Atrue}^z} \quad \frac{\frac{\overline{Atrue}^x}{A \wedge Atrue} \quad \overline{Atrue}^x}{\overline{A \wedge Atrue}} \wedge I \quad \frac{\frac{\overline{Atrue}^y}{A \wedge Atrue} \quad \overline{Atrue}^y}{\overline{A \wedge Atrue}} \wedge I}{\frac{\overline{A \wedge Atrue}}{Atrue} \wedge E_L} \vee E^{x,y} \\
\frac{\overline{Atrue}}{(A \vee A) \rightarrow Atrue} \rightarrow I^z
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\overline{A \vee A \downarrow}^z}{\overline{A \vee A \downarrow}^z} \quad \frac{\frac{\overline{A \downarrow \uparrow}^x}{A \wedge A \uparrow} \quad \overline{A \downarrow \uparrow}^x}{\overline{A \wedge A \uparrow}} \wedge I_{\uparrow} \quad \frac{\frac{\overline{A \downarrow \uparrow}^y}{A \wedge A \uparrow} \quad \overline{A \downarrow \uparrow}^y}{\overline{A \wedge A \uparrow}} \wedge I_{\uparrow}}{\frac{\overline{A \wedge A \uparrow \downarrow}}{A \downarrow \uparrow} \wedge E_{L\downarrow}} \vee E_{\uparrow}^{x,y} \\
\frac{\overline{A \downarrow \uparrow}}{(A \vee A) \rightarrow A \uparrow} \rightarrow I_{\uparrow}^z
\end{array}$$

Dowód powyższy wszelako nie zawiera "objazdów": w żadnym miejscu reguła wprowadzania nie poprzedza bezpośrednio reguły eliminacji. Odnosimy tu, że reguła $\wedge I$ (służąca do wywnioskowania $A \wedge Atrue$) bezpośrednio poprzedza regułę eliminacji, która, wszelako, nie odpowiada regule wprowadzania (a więc nie jest to $\wedge E_L$ ani $\wedge E_R$).

Powyższy przykład sugeruje, że chcąc zredukować dowolny dowód do dowodu normalnego, potrzebna będzie nam dodatkowa strategia do modyfikowania dowodów zawierających alternatywę $\vee$ oraz fałsz $\perp$. Okazuje się, że będą nam potrzebne **konwersje przemienne** $\Rightarrow_C$:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{D} & \overline{Atrue}^x & \overline{Btrue}^y \\
A \vee Btrue & \vdots & \vdots \\
& Ctrue & Ctrue \\
\hline
& \frac{Ctrue}{C'true} R & \vee E^{x,y}
\end{array}
\Rightarrow_C
\begin{array}{ccc}
\mathcal{D} & \overline{Atrue}^x & \overline{Btrue}^y \\
A \vee Btrue & \vdots & \vdots \\
& \frac{Ctrue}{C'true} R & \frac{Ctrue}{C'true} R \\
\hline
& C'true & \vee E
\end{array}$$

Zakładamy tutaj, że R jest regułą eliminacji, jako że nie ma sensu stosować konwersji przemiennej w przypadku, gdy R jest regułą wprowadzania. Odnosimy tu, że konwersja przemienne pozwala nam efektywnie ignorować regułę eliminacji $\vee E$ występującą pomiędzy regułą stosowaną do udowodnienia $Ctrue$ w drugiej lub trzeciej przesłance oraz regułą R stosowaną do udowodnienia $C'true$ na podstawie $Ctrue$ we wniosku. W pewnym sensie jedyną rolę, jaką odgrywa tu wniosek reguły $\vee E$ to zaznaczenie, że oboje typy hipotez $\overline{Atrue}^x$ oraz $\overline{Btrue}^y$ prowadzą do tego samego wniosku $Ctrue$ zamiast do dwóch różnych wniosków, powiedzmy C_1true oraz C_2true . Innymi słowy, $Ctrue$ we wniosku nie wpływa na dowód, ponieważ mamy dwie przesłanki, z których $Ctrue$ wypływa. Tym samym reguła $\vee E$ może zostać zignorowana w każdym z przypadków, w których rozważamy dedukowanie innego osądu z $Ctrue$. Jeżeli przyjmijemy następującą regułę eliminacji dla spójnika $\vee$ z dodatkowym założeniem, że oboje hipotezy $\overline{Atrue}^x$ oraz $\overline{Btrue}^y$ prowadzą do tego samego wniosku, nie będziemy potrzebować reguły konwersji przemiennej:

$$\frac{\frac{A \vee Btrue}{\overline{Atrue}^x \quad \overline{Btrue}^y} \vee E^{x,y}}{\begin{array}{c} \vdots \\ Ctrue \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ Ctrue \end{array}}$$

Stosując teraz konwersję przemienne do dowodu $(A \vee A) \rightarrow Atrue$ podanego powyżej daje w rezultacie nowy dowód tego samego osądu, do którego można zastosować lokalną redukcję:

$$\dots \quad \Rightarrow_C \quad \frac{\frac{\overline{A \vee Atrue}^z}{\overline{A \vee Atrue}^z} \quad \frac{\frac{\frac{\overline{Atrue}^x \quad \overline{Atrue}^x}{A \wedge Atrue} \wedge E_L \quad \frac{\overline{Atrue}^y \quad \overline{Atrue}^y}{A \wedge Atrue} \wedge I}{Atrue} \vee E_{x,y}}{(A \vee A) \rightarrow Atrue} \rightarrow I^z$$

Po usunięciu dwóch "objazdów" w tak zmodyfikowanym dowodzie, otrzymujemy dowód normalny etykietowany strzałkami $\uparrow$ oraz $\downarrow$:

$$\frac{\frac{\overline{A \vee A \downarrow}^z}{A \vee A \downarrow} \quad \frac{\overline{A \downarrow \uparrow}^x}{A \downarrow \uparrow} \quad \frac{\overline{A \downarrow \uparrow}^y}{A \downarrow \uparrow}}{A \uparrow} \vee E_{\uparrow}^{x,y} \quad \frac{A \uparrow}{(A \vee A) \rightarrow A \uparrow} \rightarrow I_{\uparrow}^z$$

Zadanie 13. Zdefiniuj przemenną konwersję dla spójnika $\perp$. Wskazówka: skorzystaj z tego, że $\perp$ jest "zerowym" przypadkiem spójnika $\vee$.

6.3. Długie dowody normalne. Jakkolwiek twierdzenie normalizacyjne gwarantuje istnienie dowodów $A \uparrow$ dla każdego dowodu $Atrue$, nie odnosi się do jednoznaczności dowodu $Atrue$. Istotnie, dowód $A \uparrow$ wcale nie jest wyznaczony jednoznacznie. Aby zobaczyć dlaczego, zauważmy, iż reguła $\frac{A \downarrow}{A \uparrow} \downarrow \uparrow$ nie wnosi żadnych ograniczeń na zdanie A . Tym samym, jeżeli mamy do dyspozycji dowód $A \downarrow$, w którym A nie jest formułą atomową (a więc na przykład w którym $A = A_1 \rightarrow A_2$, możemy albo odwołać się do reguły $\downarrow \uparrow$ aby bezpośrednio wydedukować $A \uparrow$, albo zastosować regułę eliminacji dla $A \downarrow$, aby później zbudować dowód $A \uparrow$ przez zastosowanie reguły wprowadzania. Na przykład, możemy udowodnić $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B) \uparrow$ stosując regułę $\downarrow \uparrow$ do $A \rightarrow B \downarrow$:

$$\frac{\frac{\overline{A \rightarrow B \downarrow}^x}{A \rightarrow B \downarrow} \downarrow \uparrow}{(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B) \uparrow} \rightarrow I_{\uparrow}^x$$

Alternatywnie możemy udowodnić ten sam osąd $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B) \uparrow$ najpierw rozkładając $A \rightarrow B \downarrow$ dopóki reguła $\downarrow \uparrow$ nie będzie miała zastosowania do $B \downarrow$ dla formuły atomowej B :

$$\frac{\frac{\overline{A \rightarrow B \downarrow}^x}{A \rightarrow B \downarrow} \quad \frac{\overline{A \downarrow \uparrow}^y}{A \downarrow \uparrow} \downarrow \uparrow}{\frac{B \downarrow}{B \uparrow} \downarrow \uparrow} \rightarrow E_{\downarrow} \quad \frac{\frac{B \downarrow}{B \uparrow} \downarrow \uparrow}{A \rightarrow B \uparrow} \rightarrow I_{\uparrow}^y \quad \frac{A \rightarrow B \uparrow}{(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B) \uparrow} \rightarrow I_{\uparrow}^x$$

Jeżeli będziemy wymagali, aby zdanie A w regule $\downarrow \uparrow$ było formułą atomową, to stosowane od góry do dołu reguły eliminacji spotkają się ze stosowanymi od dołu do góry regułami wprowadzania tylko poprzez formuły atomowe. Tym samym każdy normalny dowód stosuje reguły eliminacji dopóki pozostaną tylko osądy neutralne $A \downarrow$ dla formuł atomowych A , kiedy zaczyna stosować reguły wprowadzania tylko dla osądów normalnych $A \uparrow$ dla formuł atomowych. Tego typu dowody normalne nazywamy **długimi dowodami normalnymi**. Na przykład drugi z przytoczonych powyżej dowodów $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B) \uparrow$ jest długim dowodem normalnym, zaś pierwszy nie jest.

Rozważmy teraz system dla osądów neutralnych i normalnych, w którym reguła przymuszania $\uparrow\downarrow$ jest atomowa:

$$\frac{A \downarrow}{A \uparrow} \uparrow\downarrow (A \text{ atomowa})$$

Jeżeli będziemy potrafili pokazać, że oryginalna reguła $\uparrow\downarrow$ (bez żadnych obostrzeń dla zdania A) jest wyprowadzalna, to będziemy wiedzieli, że wszystkie reguły eliminacji są wystarczająco silne w takim sensie, że nawet gdy wszystkie zdania zostaną rozłożone na formuły atomowe po zastosowaniu reguł eliminacji, to nie zostanie utracona żadna informacja (wygodnie jest w tym przypadku myśleć o $A \uparrow$ oraz $A \downarrow$ jako o sposobach wyrażenia pewnej strategii dowodzenia A_{true}). Jako własność wszystkich reguł eliminacji razem wziętych, taką własność nazwiemy **globalną zupełnością** (przypomnijmy, że reguła lokalnej zupełności orzekała, iż analogiczna własność zachodziła dla konkretnej reguły eliminacji).

Zdefiniowany przez nas system dla osądów neutralnych i normalnych spełnia własność globalnej zupełności. Możemy pokazać indukcyjnie, że oryginalna reguła $\uparrow\downarrow$ bez żadnych obostrzeń dla zdania A jest wyprowadzalna.

Twierdzenie 14. *Reguła $\frac{A \downarrow}{A \uparrow}$ jest wyprowadzalna.*

Dowód. Dowód prowadzimy przez indukcję względem budowy zdania A . Jeżeli jest to formuła atomowa, stosujemy nową regułę $\uparrow\downarrow$ (z obostrzeniem dla zdania A). Pokażemy, dla przykładu, przypadek $A = A_1 \rightarrow A_2$:

$$\frac{\frac{A_1 \rightarrow A_2 \downarrow}{\frac{A_2 \downarrow}{A_2 \uparrow} \text{ założenie indukcyjne wobec } A_2} \rightarrow E_{\downarrow} \quad \frac{\overline{A_1 \downarrow}^x}{A_1 \uparrow} \text{ założenie indukcyjne wobec } A_1}{A_1 \rightarrow A_2 \uparrow} \rightarrow I_{\uparrow}^x$$

□

Zadanie 14. *Dokończyć dowód powyższego twierdzenia.*