

5. WYKŁAD 5: LOGICZNA RÓWNOWAŻNOŚĆ. OSĄDY HIPOTETYCZNE. LOKALNA NIESPRZECZNOŚĆ I ZUPEŁNOŚĆ.

5.1. Logiczna równoważność. Powiemy, że zdanie A jest logicznie równoważne zdaniu B , co oznaczamy przez $A \equiv B$, jeżeli A_{true} pociąga B_{true} i na odwrót. Innymi słowy logiczna równoważność jest konwencją notacyjną następującej postaci:

$$A \equiv B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)_{true}$$

Jeżeli A i B są logicznie równoważne, to każdorazowe pojawienie się zdania A w innym zdaniu może zostać podmienione na B i vice versa. Tym samym logiczna równoważność pozwala nam na uproszczenie dowodów zawierających zdania logicznie równoważne mniej skomplikowanym zdaniom. Na przykład dowód

$$\neg\neg\neg A \rightarrow (\neg\neg\neg B \rightarrow \neg(A \vee B))_{true}$$

staje się prostszy (czy wręcz oczywisty), jeżeli zamienimy $\neg\neg\neg A \rightarrow (\neg\neg\neg B \rightarrow \neg(A \vee B))$ na $(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B)$ wykorzystując logiczne równoważności $\neg\neg\neg A \equiv \neg A$ oraz $A \rightarrow (B \rightarrow C) \equiv (A \wedge B) \rightarrow C$.

Poniżej podajemy listę wybranych logicznych równoważności w rachunku zdań, którą podzieliliśmy na trzy grupy:

5.1.1. Przemienność i idempotencja. Koniunkcja i alternatywa są przemienne i idempotentne. Implikacja $A \rightarrow A$ jest logicznie bezwartościowa i redukuje się do $\top$:

- (C1) $A \wedge B \equiv B \wedge A$
- (C2) $A \vee B \equiv B \vee A$
- (C3) $A \rightarrow B \not\equiv B \rightarrow A$
- (I1) $A \wedge A \equiv A$
- (I2) $A \vee A \equiv A$
- (I3) $A \rightarrow A \equiv \top$

5.1.2. Prawda i fałsz. Każda z poniższych równoważności odnosi się do zdań postaci $\top \phi A$, $\perp \phi A$, $A \rightarrow \top$ lub $\perp \rightarrow A$, gdzie ϕ oznacza jeden ze spójników $\wedge, \vee$ lub $\rightarrow$:

- (M1) $\top \wedge A \equiv A$
- (M2) $\top \vee A \equiv \top$
- (M3) $\top \rightarrow A \equiv A$
- (M4) $\perp \wedge A \equiv \perp$
- (M5) $\perp \vee A \equiv A$
- (M6) $\perp \rightarrow A \equiv \top$
- (M7) $A \rightarrow \top \equiv \top$
- (M8) $A \rightarrow \perp \equiv \neg A$

5.1.3. Związki pomiędzy spójnikami. Każda z poniższych równoważności odnosi się do zdań postaci $A \phi (B \phi C)$ lub $(A \phi B) \rightarrow C$, gdzie ϕ oznacza jeden ze spójników $\wedge, \vee$ lub $\rightarrow$:

- (L1) $A \wedge (B \wedge C) \equiv A \wedge (B \wedge C)$ (łączność $\wedge$)
- (L2) $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (rozdzielność $\wedge$ względem $\vee$)
- (L3) $A \wedge (B \rightarrow C) \equiv ?$ (brak związku)
- (L4) $A \vee (B \vee C) \equiv A \vee (B \vee C)$ (łączność $\vee$)
- (L5) $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (rozdzielność $\vee$ względem $\wedge$)
- (L6) $A \vee (B \rightarrow C) \equiv ?$ (brak związku)
- (L7) $A \rightarrow (B \wedge C) \equiv (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$ (rozdzielność $\rightarrow$ względem $\wedge$)

- (L8) $A \rightarrow (B \rightarrow C) \equiv ?$ (brak związku)
 (L9) $A \rightarrow (B \rightarrow C) \equiv (A \wedge B) \rightarrow C$
 (L10) $(A \vee B) \rightarrow C \equiv (A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)$
 (L11) $(A \rightarrow B) \rightarrow C \equiv ?$ (brak związku)

Zadanie 9. Udowodnić równoważności (L2), (L4), (L7), (L9) oraz (L10).

5.2. Osądy hipotetyczne. Podane przez nas wcześniej reguły wnioskowania definiujące system naturalnej dedukcji dla rachunku zdań nie nadają się zbyt do pisania dowodów hipotetycznych. Dzieje się tak ponieważ żadna z podanych reguł nie dostarcza wygodnej metody do śledzenia zasięgu każdej z hipotez, co zasadniczo uniemożliwia ustrzeżenie się przed utratą kontroli nad zasięgiem obowiązywania hipotez. Na przykład następujący dowód hipotetyczny zawiera błędne użycie hipotezy $\overline{Atrue}^x$ poza jej zasięgiem obowiązywania:

$$\frac{\frac{\overline{Atrue}^x}{A \rightarrow Atrue} \rightarrow I^x \quad \overline{Atrue}^x \text{ (błędne użycie)}}{(A \rightarrow A) \wedge Atrue} \wedge I$$

Za każdym razem, gdy wprowadzamy nową hipotezę, możemy wyobrazić sobie, że rysujemy kontur oznaczający zasięg jej obowiązywania, tak jak poniżej:

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} \overline{Atrue}^x \\ \vdots \\ Btrue \end{array}}}{A \rightarrow Btrue} \rightarrow I^x \quad \frac{A \vee Btrue \quad \boxed{\begin{array}{c} \overline{Atrue}^x \\ \vdots \\ Ctrue \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} \overline{Btrue}^y \\ \vdots \\ Ctrue \end{array}}}{Ctrue} \vee E^{x,y}$$

W powyższych przykładach zakres obowiązywania hipotezy $\overline{Atrue}^x$ jest ograniczony konturem oznaczonym przez x . Zauważmy, że jeden kontur może znajdować się wewnątrz innego konturu, tak jak w poniższym przykładzie:

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} \overline{Atrue}^x \\ \boxed{\begin{array}{c} \overline{Btrue}^y \\ \hline A \wedge Btrue \end{array}} \wedge I \\ \hline B \rightarrow (A \wedge B)true \end{array}} \rightarrow I^x}{A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))true} \rightarrow I^x$$

Hipoteza $\overline{Atrue}^x$ może być użyta wewnątrz wewnętrznego konturu oznaczonego przez y , dzięki czemu potrafimy udowodnić $A \wedge Btrue$ z wykorzystaniem reguły $\wedge I$, ale hipoteza $\overline{Btrue}^y$ nie może być użyta poza wewnętrznym konturem.

Osądy hipotetyczne dostarczają wygodnego sposobu na śledzenie zasięgu każdej z hipotez w dowodzie hipotetycznym. Hipotetyczny osąd $J_1, \dots, J_n \vdash J$ odzwierciedla hipotetyczny dowód osądu J na podstawie ciągu hipotez $\overline{J_1}, \dots, \overline{J_n}$:

$$J_1, \dots, J_n \vdash J \Leftrightarrow \left. \begin{array}{c} \overline{J_1} \quad \dots \quad \overline{J_n} \\ \vdots \\ J \end{array} \right\} \text{ reguły wnioskowania}$$

Tym samym możemy odczytywać $J_1, \dots, J_n \vdash J$ jako "jeśli zachodzą osądy $J_1, \dots, J_n$, to zachodzi osąd J ". Gdy zachodzi osąd hipotetyczny $J_1, \dots, J_n \vdash J$ mówimy, że J jest konsekwencją $J_1, \dots, J_n$. Tym samym $\vdash$ nazywana jest **relacją konsekwencji**. O osądach $J_1, \dots, J_n$ będziemy myśleli jak o **przesłankach**, zaś o osądzie J jak o **wniosku**. Zbiór przesłanek często będziemy zapisywali krótko jako Γ , skracając tym samym zapis osądu hipotetycznego do $\Gamma \vdash J$.

Rozwijając dalej system naturalnej dedukcji dla rachunku zdań będziemy używami hipotetycznych osądów postaci $A_1 \text{true}, \dots, A_n \text{true} \vdash A \text{true}$, gdzie zarówno przesłanki jak i wniosek są zawsze osądami o prawdzie. Zanim podamy reguły wnioskowania dla tak rozumianego rachunku zdań, prześledźmy najpierw wybrane własności osądów hipotetycznych odnoszących się do przesłanek i wniosków dowolnej postaci.

Podana definicja osądu hipotetycznego w trywialny sposób zapewnia prawdziwość następujących dwóch zasad **zwrotności** oraz **reguły podstawiania**:

- (zwrotność) $\Gamma, J, \Gamma' \vdash J$
- (reguła podstawiania) jeżeli $\Gamma \vdash J$ oraz $\Gamma, J \vdash J'$, to wówczas $\Gamma \vdash J'$.

Zasada zwrotności orzeka, że możemy wykorzystać hipotezę $\bar{J}$, aby wywnioskować J . Reguła podstawiania powiada z kolei, iż jeśli potrafimy udowodnić osąd J na podstawie pewnego ciągu hipotez, to możemy użyć J jako nowej hipotezy za każdym razem, gdy wykorzystujemy ten sam zbiór hipotez. Innymi słowy, możemy wykorzystać J jako lemat w dowodzie osądu $\Gamma \vdash J'$.

Aby zilustrować działanie reguły podstawiania, załóżmy $\Gamma \vdash J$ oraz $\Gamma, J \vdash J'$, co oznacza istnienie dwóch dowodów hipotetycznych $\mathcal{D}$ i $\mathcal{E}$ jak poniżej:

$$\Gamma \vdash J \Leftrightarrow \left. \begin{array}{c} \bar{\Gamma} \\ \vdots \\ J \end{array} \right\} \mathcal{D} \quad \Gamma, J \vdash J' \Leftrightarrow \left. \begin{array}{c} \bar{\Gamma} \quad \dots \quad \bar{J} \\ \vdots \\ J' \end{array} \right\} \mathcal{E}$$

Symbol $\bar{\Gamma}$ oznacza tu, jak nietrudno się domyślić, $\{\bar{J} : J \in \Gamma\}$. Teraz możemy odnaleźć każde wystąpienie hipotezy $\bar{J}$ w dowodzie $\mathcal{E}$ i **podstawić** za nią $\mathcal{D}$, otrzymując tym samym następujący dowód hipotetyczny:

$$\left. \begin{array}{c} \bar{\Gamma} \quad \dots \quad \left. \begin{array}{c} \bar{\Gamma} \\ \vdots \\ J \end{array} \right\} \mathcal{D} \\ \vdots \\ J' \end{array} \right\}$$

Jako że ta sama hipoteza (na przykład jedna z hipotez występujących w $\bar{\Gamma}$ może być użyta dowolną liczbę razy, powyższy osąd hipotetyczny sankcjonuje osąd hipotetyczny $\Gamma \vdash J'$, czyli to, co przez regułę podstawiania otrzymujemy z osądów $\Gamma \vdash J$ oraz $\Gamma, J \vdash J'$.

W naszej definicji osądu hipotetycznego pojawiają się dwa istotne założenia: po pierwsze, kolejność pojawiania się hipotez nie ma znaczenia i po drugie, dana hipoteza może być użyta zero lub więcej razy w dowodzie hipotetycznym. Te założenia formalnie zapisujemy jako **własności strukturalne** osądów hipotetycznych:

- (wymiana) jeżeli $\Gamma, J_i, J_{i+1}, \Gamma' \vdash J$, to wówczas $\Gamma, J_{i+1}, J_i, \Gamma' \vdash J$
- (osłabienie) jeżeli $\Gamma, \Gamma' \vdash J$, to wówczas $\Gamma, J', \Gamma' \vdash J$ dla dowolnego osądu J'
- (ściąganie) jeżeli $\Gamma, J_i, J_i \Gamma' \vdash J$, to wówczas $\Gamma, J_i, \Gamma' \vdash J$

Zasada wymiany orzeka, że możemy zignorować kolejność występowania przesłanek w osądzie hipotetycznym. Zasada osłabienia powiada, iż może dodać nową przesłankę, a następnie jej nie użyć, tym

samym "osłabiając" to, co dowodzimy. Na koniec zasada ściągania mówi, że możemy "ściągnąć" dwie kopie tej samej przesłanki do jednego egzemplarza. Odnosimy tu, iż wobec zasady osłabiania, hipoteza może być użyta zero razy, zaś wobec zasady ściągania – może być użyta więcej niż jeden raz.

Oto kilka dalszych uwag wartych odnotowania:

- Osądy hipotetyczne są w zasadzie tylko wygodnym, a nie nowym, sposobem reprezentowania dowodów hipotetycznych. Innymi słowy relacja $\vdash$ jest tylko narzędziem syntaktycznym służącym prezentowaniu hipotez i wniosków osądu hipotetycznego i jednoczesnemu ukrywaniu ich wewnętrznej struktury i tym samym nie wprowadzającym nowego pojęcia semantycznego.
- Ogólnie dopuszczamy możliwość skorzystania z więcej niż jednego dowodu hipotetycznego celem dowodu osądu hipotetycznego, jako że osądy hipotetyczne odnoszą się wyłącznie do hipotez i wniosków.
- Osąd hipotetyczny sam w sobie jest przykładem osądu jako takiego i tym samym może być użyty jako przesłanka bądź jako wniosek w innym osądzie hipotetycznym, jakkolwiek nie będziemy używać w ten sposób osądów hipotetycznych w dalszym toku tego wykładu. W istocie $J_1, \dots, J_n \vdash J$ można rozważać jako skrót pewnego scentrowanego osądu $J_1 \vdash (J_2 \vdash \dots, J_n \vdash J) \dots$, gdzie każda z przesłanek J_i lub wniosek J może być innym osądem hipotetycznym.
- Jakkolwiek dość blisko związane, hipotetyczny osąd $J_1, \dots, J_n \vdash J$ i reguła $\frac{J_1, \dots, J_n}{J} R$ to nie to samo i nie można ich porównywać celem odnalezienia potencjalnej równoważności. Powód jest prosty: hipotetyczny osąd to, jak sama nazwa wskazuje, osąd, zaś R to reguła wnioskowania. Istnienie dowodu $J_1, \dots, J_n \vdash J$ oznacza tylko, że R jest regułą wyprowadzalną. Na odwrót, jeśli dostępna jest reguła wnioskowania R , to zawsze potrafimy uzasadnić $J_1, \dots, J_n \vdash J$ za pomocą następującego dowodu hipotetycznego:

$$\frac{\overline{J_1} \dots \overline{J_n}}{J} R$$

Odnosimy wszakże, iż powyższy dowód hipotetyczny może nie być jedynym sposobem udowodnienia $J_1, \dots, J_n \vdash J$, jeżeli tylko potrafimy wskazać inny dowód hipotetyczny

$$\begin{array}{ccc} \overline{J_1} & \dots & \overline{J_n} \\ \vdots & & \\ J & & \end{array} \quad \text{bez}$$

użycia reguły R .

- Osąd hipotetyczny $\vdash J$ bez przesłanek **nie jest** równoważny swojemu wnioskowi J . O ile osąd informuje nas, że J zachodzi bezwarunkowo, o tyle wniosek J sam funkcjonuje w oderwaniu od tego, czy założyliśmy jakiegokolwiek hipotezy i w szczególności sam może być hipotezą w osądzie hipotetycznym. Na przykład, wobec założenia $J \vdash J'$ możemy pokazać, że $\vdash J$ implikuje $\vdash J'$ stosując regułę podstawiania. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, ponieważ dowód $\vdash J'$ wcale nie musi być rozszerzeniem dowodu $\vdash J$.
- Ważną konsekwencją własności strukturalnych jest to, że dwa osądy hipotetyczne w każdej z reguł, a mianowicie $\Gamma \vdash J$ z części "jeśli" reguły oraz $\Gamma' \vdash J$ z części "to wówczas", reprezentują dowody hipotetyczne nie tylko tej samej wielkości (mierzonej liczbą zastosowań reguł wnioskowania), ale również o dokładnie takiej samej strukturze. W rezultacie za każdym razem, gdy stosujemy indukcję strukturalną (lub indukcję reguł) do $\Gamma \vdash J$, możemy zamiast tego zastosować indukcję strukturalną do $\Gamma' \vdash J$.

System naturalnej dedukcji dla rachunku zdań zapisany z użyciem osądów hipotetycznych będzie wyglądał następująco:

- $\frac{A \text{true} \in \Gamma}{\Gamma \vdash A \text{true}} \text{Hyp}$

- $\frac{\Gamma, Atrue \vdash Btrue}{\Gamma \vdash A \rightarrow Btrue} \rightarrow I$
- $\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow Btrue \quad \Gamma \vdash Atrue}{\Gamma \vdash Btrue} \rightarrow E$
- $\frac{\Gamma \vdash Atrue \quad \Gamma \vdash Btrue}{\Gamma \vdash A \wedge Btrue} \wedge I$
- $\frac{\Gamma \vdash A \wedge Btrue}{\Gamma \vdash Atrue} \wedge E_L$
- $\frac{\Gamma \vdash A \wedge Btrue}{\Gamma \vdash Btrue} \wedge E_R$
- $\frac{\Gamma \vdash Atrue}{\Gamma \vdash A \vee Btrue} \vee I_L$
- $\frac{\Gamma \vdash Btrue}{\Gamma \vdash A \vee Btrue} \vee I_R$
- $\frac{\Gamma \vdash A \vee Btrue \quad \Gamma, Atrue \vdash Ctrue \quad \Gamma, Btrue \vdash Ctrue}{\Gamma \vdash Ctrue} \vee E$
- $\frac{}{\Gamma \vdash \top true} \top I$
- $\frac{\Gamma \vdash \perp true}{\Gamma \vdash Ctrue} \perp E$
- $\frac{\Gamma, Atrue \vdash \perp true}{\Gamma \vdash \neg Atrue} \neg I$
- $\frac{\Gamma \vdash \neg Atrue \quad \Gamma \vdash Atrue}{\Gamma \vdash \perp true} \neg E$

Reguła **Hyp** odzwierciedla zwrotność osądów hipotetycznych. Wszystkie pozostałe reguły są uzasadnione ich odpowiednikami w zbudowanym przez nas wcześniej systemie naturalnej dedukcji. Jako przykład rozważmy regułę $\rightarrow I$. Przesłanka $\Gamma, Atrue \vdash Btrue$ pociąga istnienie hipotetycznego dowodu wyprowadzającego $Btrue$ z hipotez $\bar{\Gamma}$ oraz $\overline{Atrue}$:

$$\Gamma, Atrue \vdash Btrue \Leftrightarrow \begin{array}{c} \bar{\Gamma} \quad \dots \quad \overline{Atrue} \\ \vdots \\ Btrue \end{array}$$

Stosujemy teraz wcześniej zdefiniowaną regułę $\rightarrow I$ do wniosku $Btrue$ względem hipotezy $\overline{Atrue}$. Innymi słowy, zastosowanie reguły $\rightarrow I$ wyznacza $\overline{Atrue}$ jako odpowiadającą jej hipotezę:

$$\frac{\begin{array}{c} \bar{\Gamma} \quad \dots \quad \overline{Atrue}^x \\ \vdots \\ Btrue \end{array}}{A \rightarrow Btrue} \rightarrow I^x$$

Zauważmy, iż hipotezy w dowodzie zawierają w szczególności hipotezy $\bar{\Gamma}$, ale nie zawierają hipotezy $\overline{Atrue}^x$, która zostaje zwolniona w momencie zastosowania reguły $\rightarrow I$. Innymi słowy, mamy tu dowód hipotetyczny osądu hipotetycznego $\Gamma \vdash A \rightarrow B$:

$$\Gamma \vdash A \rightarrow Btrue \iff \frac{\overline{\Gamma} \quad \dots \quad \overline{Atrue}^x \quad \vdots \quad Btrue}{A \rightarrow Btrue} \rightarrow I^x$$

Tym samym możemy udowodnić $\Gamma \vdash A \rightarrow Btrue$ o ile dysponujemy dowodem $\Gamma, Atrue \vdash Btrue$, co uzasadnia poprawność reguły $\rightarrow I$.

Użycie osądów hipotetycznych eliminuje konieczność etykietowania hipotez. Jako przykład rozważmy poniższy dowód osądu hipotetycznego $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))true$:

$$\frac{\frac{\frac{\overline{Atrue, Btrue \vdash Atrue} \text{ Hyp} \quad \overline{Atrue, Btrue \vdash Btrue} \text{ Hyp}}{Atrue, Btrue \vdash A \wedge Btrue} \wedge I}{Atrue \vdash B \rightarrow (A \wedge B)true} \rightarrow I}{\vdash A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))true} \rightarrow I$$

Odnosimy tu dwie obserwacje, jakie należy poczynić omawiając zmodyfikowany przed chwilą system naturalnej dedukcji. Po pierwsze, każdy liść w drzewie dedukcyjnym dla $\Gamma \vdash Ctrue$ (gdzie $\Gamma \vdash Ctrue$ jest korzeniem) powstaje przez zastosowanie reguły **Hyp** lub reguły $\top I$. W szczególności, jeżeli reguła $\top I$ nie jest użyta (co często ma miejsce), drzewo dedukcyjne ma następującą postać:

$$\frac{\overline{\Gamma_1 \vdash A_1true} \text{ Hyp} \quad \dots \quad \overline{\Gamma_n \vdash A_ntrue} \text{ Hyp}}{\vdots} \Gamma \vdash Ctrue$$

Po drugie, zbiór przesłanek zawsze rozszerza się do reguły wnioskowania, gdy poruszamy się od wniosku do jego przesłanek (a zatem od dołu do góry dowodu). Innymi słowy, reguła $\frac{\Gamma' \vdash Atrue \dots}{\Gamma \vdash Ctrue}$ spełnia warunek $\Gamma \subset \Gamma'$. W szczególności powyższe drzewko dedukcyjne dla $\Gamma \vdash Ctrue$ spełnia warunki $\Gamma \subset \Gamma_1, \dots, \Gamma \subset \Gamma_n$.

Zasady osłabiania i ściągania możemy teraz wysłowić w następujący sposób:

Twierdzenie 7 (własności strukturalne).

- (1) (*Oslabianie*). Jeżeli $\Gamma \vdash Ctrue$, to wówczas $\Gamma, Atrue \vdash Ctrue$.
- (2) (*Ściąganie*). Jeżeli $\Gamma, Atrue, Atrue \vdash Ctrue$, to wówczas $\Gamma, Atrue \vdash Ctrue$.

Dowód. Dowód prowadzimy przez indukcję względem struktury dowodów $\Gamma \vdash Ctrue$ oraz $\Gamma, Atrue, Atrue \vdash Ctrue$. Dla zasady osłabiania, dowód $\Gamma, Atrue \vdash Ctrue$ ma dokładnie taką samą strukturę jak dowód $\Gamma \vdash Ctrue$. Tym samym jeżeli możemy zastosować indukcję strukturalną do $\Gamma \vdash Ctrue$, tym bardziej możemy ją zastosować do $\Gamma, Atrue \vdash Ctrue$. Podobne rozumowanie stosujemy dla ściągania. $\square$

Dowodliwość zasady podstawiania potwierdza, iż nasz system logiczny odpowiada definicji osądu hipotetycznego. Innymi słowy, gdyby zasada podstawiania była niemożliwa do udowodnienia, oznaczałoby to, iż jedna z podanych przez nas reguł wnioskowania nie została zaprojektowana zgodnie z zasadami obowiązującymi między osądami hipotetycznymi i dowodami hipotetycznymi.

Twierdzenie 8. (*Podstawianie*.) Jeżeli $\Gamma \vdash Atrue$ oraz $\Gamma, Atrue \vdash Ctrue$, to wówczas $\Gamma \vdash Ctrue$.

Zadanie 10. Do którego z osądów należy zastosować indukcję strukturalną w dowodzie powyższego twierdzenia, do $\Gamma \vdash Atrue$ czy do $\Gamma, Atrue \vdash Ctrue$? Dlaczego?

Zanim przystąpimy do dowodu powyższego twierdzenia, warto spróbować przewidzieć jak dowód będzie przebiegał. Na przykład pomocne będzie ustalenie do którego z osądów $\Gamma \vdash Atrue$ oraz $\Gamma, Atrue \vdash Ctrue$ należy zastosować indukcję strukturalną. Dla uproszczenia założymy, że reguła $\top I$ nie jest użyta w dowodzie $\Gamma, Atrue \vdash Ctrue$ (dowód $\Gamma \vdash Atrue$ może z kolei używać reguły $\top I$). Wówczas drzewo dedukcyjne dla dowodu $\Gamma, Atrue \vdash Ctrue$ będzie miało następującą postać:

$$\frac{}{\Gamma_1, Atrue \vdash C_1true} \text{Hyp} \quad \dots \quad \frac{}{\Gamma_n, Atrue \vdash C_ntrue} \text{Hyp} \\ \vdots \\ \Gamma, Atrue \vdash Ctrue$$

gdzie każdy z liści $\frac{}{\Gamma_i, Atrue \vdash C_itrue} \text{Hyp}$ spełnia warunek $\Gamma \subset \Gamma_i, i \in \{1, \dots, n\}$. Rozważmy teraz i -ty liść. Jeżeli $C_itrue \in \Gamma_i$, to przesłanka $Atrue$ w $\Gamma_i, Atrue \vdash C_itrue$ nie odgrywa roli w dowodzie i liść można bezpiecznie zastąpić liściem $\frac{}{\Gamma_i \vdash C_itrue} \text{Hyp}$. Jeśli $C_i = A$, to wówczas osłabiamy $\Gamma \vdash Atrue = \Gamma \vdash C_itrue$ aby uzyskać $\Gamma_i \vdash C_itrue$, które następnie jest podstawiane za $\Gamma_i, Atrue \vdash C_itrue$. W rezultacie żaden z liści nie będzie zawierał $Atrue$ jako przesłanki, a więc stosując opisane powyżej zmiany dla całego drzewa aż do korzenia, przekształcimy drzewo dedukcyjne w nowe drzewo dla $\Gamma \vdash Ctrue$. Tym samym będziemy analizować strukturę dowodu $\Gamma, Atrue \vdash Ctrue$ aby zlokalizować wszystkie jego liście. Innymi słowy, będziemy stosować indukcję strukturalną dla $\Gamma, Atrue \vdash Ctrue$.

Dowód. Dowód prowadzimy przez indukcję względem struktury dowodu $\Gamma, Atrue \vdash Ctrue$. Musimy rozważyć trzy przypadki: **Hyp**, $\rightarrow I$ oraz $\rightarrow E$.

Przypadek $\frac{Ctrue \in \Gamma}{\Gamma, Atrue \vdash Ctrue} \text{Hyp}$:
 $\Gamma \vdash Ctrue$ wobec reguły **Hyp** dla $Ctrue \in \Gamma$.

Przypadek $\frac{}{\Gamma, Atrue \vdash Ctrue} \text{Hyp}$ gdzie $A = C$:
 $\Gamma \vdash Ctrue$ wobec założenia $\Gamma \vdash Atrue$.

Przypadek $\frac{\Gamma, Atrue, C_1true \vdash C_2true}{\Gamma, Atrue \vdash C_1 \rightarrow C_2true} \rightarrow I$ gdzie $C = C_1 \rightarrow C_2$:
 $\Gamma, C_1true \vdash Atrue$ wobec osłabienia $\Gamma \vdash Atrue$
 $\Gamma, C_1true \vdash C_2true$ wobec założenia indukcyjnego dla $\Gamma, Atrue, C_1true \vdash C_2true$ z $\Gamma, C_1true \vdash Atrue$
 $\Gamma \vdash C_1 \rightarrow C_2true$ wobec reguły $\rightarrow I$ z $\Gamma, C_1true \vdash C_2true$.

Przypadek $\frac{\Gamma, Atrue \vdash C' \rightarrow Ctrue, \Gamma, Atrue \vdash C'true}{\Gamma, Atrue \vdash Ctrue} \rightarrow E$:
 $\Gamma \vdash C' \rightarrow Ctrue$ wobec założenia indukcyjnego dla $\Gamma, Atrue \vdash C' \rightarrow Ctrue$ z $\Gamma \vdash Atrue$
 $\Gamma \vdash C'true$ wobec założenia indukcyjnego dla $\Gamma, Atrue \vdash C'true$ z $\Gamma \vdash Atrue$
 $\Gamma \vdash Ctrue$ wobec reguły $\rightarrow E$ z $\Gamma \vdash C' \rightarrow Ctrue$ oraz $\Gamma \vdash C'true$. $\square$

Tym samym mając dany dowód $\mathcal{D}$ osądu $\Gamma \vdash Atrue$ oraz dowód $\mathcal{E}$ osądu $\Gamma, Atrue \vdash Ctrue$, możemy zawsze zapisać dowód, oznaczany przez $[\mathcal{D}/Atrue]\mathcal{E}$, osądu $\Gamma \vdash Ctrue$ przez podstawienie $\mathcal{D}$ w $\mathcal{E}$.

5.3. Lokalna niesprzeczność i zupełność. Wszystkie podane wcześniej reguły wnioskowania wydają się mieć sens intuicyjnie, ale ich poprawność musi być jeszcze formalnie zweryfikowana. Na przykład, chcielibyśmy spodziewać się, aby reguła eliminacji dla $\wedge$ pozwalała wywnioskować $Atrue$ z $A \wedge Btrue$, a z drugiej strony, zby reguła ta nie pozwalała na wywnioskowanie $Ctrue$ z $A \wedge Btrue$, jeżeli C nie jest w żaden sposób powiązane z A oraz B . Wobec tego musimy zdecydować o wyborze pewnych zasad określających w jaki sposób należy budować system naturalnej dedukcji oraz jakie reguły wnioskowania

należy przyjmować, a jakie odrzucać. Zasady, które przyjmiemy, będą gwarantowały, iż nasz system będzie spełniał dwie własności: **logiczną niesprzeczność** oraz **zupełność**.

Reguła wprowadzania kompresuje wiedzę zawartą w jej przesłankach w postaci osądu o prawdzie jako wniosku, podczas gdy reguła eliminacji odczytuje wiedzę skompresowaną w osądzie o prawdzie w jej przesłance celem wydedukowania nowego osądu we wniosku. Zasada lokalnej niesprzeczności orzeka, iż wiedza uzyskana z osądu po zastosowaniu reguły eliminacji jest tylko częścią wiedzy skompresowanej w danym osądzie. Tym samym, jeżeli zasada lokalnej niesprzeczności nie będzie spełniona, reguła eliminacji będzie zbyt silna w takim sensie, że będzie w stanie generować wiedzę niekoniecznie uzasadnioną przez dany osąd; wobec tego lokalna niesprzeczność zapewnia, iż reguła eliminacji nie jest zbyt silna. Zasada lokalnej zupełności orzeka, iż wiedza otrzymana z danego osądu przez regułę eliminacji zawiera przynajmniej tę wiedzę, jaka jest skompresowana w obrębie danego osądu. Tym samym, jeżeli zasada lokalnej spójności nie będzie spełniona, reguła eliminacji będzie zbyt słaba w takim sensie, że będzie niezdolna odczytać całą wiedzę skompresowaną w obrębie danego osądu; wobec tego zasada lokalnej spójności zapewnia, iż reguła eliminacji jest wystarczająco silna. Jeżeli dana reguła eliminacji spełnia obydwie zasady, to pozwala uzyskać dokładnie tę wiedzę, jaka została skompresowana w osądzie w przesłance.

Zasadę lokalnej niesprzeczności weryfikujemy pokazując w jaki sposób można zredukować dowód, w którym reguła wprowadzania pojawia się bezpośrednio przed odpowiadającą jej regułą eliminacji. Jako przykład rozważmy następujący przykład, w którym reguła wprowadzania $\wedge I$ pojawia się bezpośrednio przed odpowiadającą jej regułą eliminacji $\wedge E_L$:

$$\frac{\frac{\mathcal{D} \quad \mathcal{E}}{Atrue \quad Btrue} \wedge I}{\frac{A \wedge Btrue}{Atrue} \wedge E_L} \wedge I$$

Reguła $\wedge E_L$ nie jest zbyt silna, albowiem to, co dzięki niej potrafimy wydedukować we wniosku, a zatem $Atrue$, jest jednym z dwóch osądów użytych do wydedukowania $A \wedge Btrue$. Tym samym cały dowód redukuje się do prostszego dowodu $\mathcal{D}$:

$$Atrue \leftarrow_R \frac{\frac{\mathcal{D} \quad \mathcal{E}}{Atrue \quad Btrue} \wedge I}{\frac{A \wedge Btrue}{Atrue} \wedge E_L} \wedge I$$

Gdyby reguła $\wedge E_L$ była zbyt silna (gdyby dało się z niej jakoś wywnioskować na przykład $A \rightarrow Btrue$), powyższego dowodu nie dałoby się zredukować.

Jako kolejny przykład, rozważmy następujący dowód, w którym reguła wprowadzania $\rightarrow I$ bezpośrednio poprzedza regułą eliminacji $\rightarrow E$:

$$\frac{\frac{\overline{Atrue}^x}{\vdots} \quad \frac{Btrue}{A \rightarrow Btrue} \rightarrow I^x \quad \mathcal{D}}{Btrue} \rightarrow E$$

Reguła $\rightarrow E$ nie jest zbyt silna, albowiem cały powyższy dowód daje się zredukować do krótszego dowodu tego samego osądu $Btrue$ podstawiając $\mathcal{D}$ w miejsce hipotezy $\overline{Atrue}^x$ w przesłance reguły $\rightarrow I^x$:

$$\begin{array}{c}
\mathcal{D} \\
Atrue \\
\vdots \\
Btrue
\end{array}
\begin{array}{c}
\overline{Atrue}^x \\
\vdots \\
Btrue
\end{array}
\begin{array}{c}
\leftarrow_R \\
\frac{A \rightarrow Btrue}{A \rightarrow Btrue} \rightarrow I^x
\end{array}
\begin{array}{c}
\mathcal{D} \\
Atrue
\end{array}
\begin{array}{c}
\frac{Btrue}{Btrue} \rightarrow E
\end{array}$$

W systemie naturalnej dedukcji opartym na osądach hipotetycznych, reguła podstawiania uzasadnia $\Gamma \vdash Btrue$ za każdym razem, gdy mamy do dyspozycji dowody $\Gamma \vdash Atrue$ oraz $\Gamma, A \vdash Btrue$:

$$\begin{array}{c}
\mathcal{D} \\
[\mathcal{E}/Atrue]\mathcal{D} \\
\Gamma \vdash Btrue
\end{array}
\begin{array}{c}
\leftarrow_R \\
\frac{\Gamma, Atrue \vdash Btrue}{\Gamma \vdash A \rightarrow Btrue} \rightarrow I
\end{array}
\begin{array}{c}
\mathcal{E} \\
\Gamma \vdash Atrue
\end{array}
\begin{array}{c}
\frac{\Gamma \vdash Btrue}{\Gamma \vdash Btrue} \rightarrow E
\end{array}$$

Przypadek $\vee$ jest podobny do przypadku $\rightarrow$ i również stosuje zasadę podstawiania:

$$\begin{array}{c}
\mathcal{D} \\
Atrue \\
\vdots \\
Ctrue
\end{array}
\begin{array}{c}
\mathcal{D} \\
Atrue \\
\vdots \\
A \vee Btrue
\end{array}
\begin{array}{c}
\leftarrow_R \\
\vee I_L
\end{array}
\begin{array}{c}
\overline{Atrue}^x \\
\vdots \\
Ctrue
\end{array}
\begin{array}{c}
\overline{Btrue}^y \\
\vdots \\
Ctrue
\end{array}
\begin{array}{c}
\frac{Ctrue}{Ctrue} \vee E^{x,y}
\end{array}$$

natomiast w systemie dedukcji opartym na osądach hipotetycznych:

$$\begin{array}{c}
\mathcal{D} \\
[\mathcal{D}/Atrue]\mathcal{E}_L \\
\Gamma \vdash Ctrue
\end{array}
\begin{array}{c}
\leftarrow_R \\
\frac{\Gamma \vdash Atrue}{\Gamma \vdash A \vee Btrue} \vee I_L
\end{array}
\begin{array}{c}
\mathcal{E}_L \\
\Gamma, A \vdash Ctrue
\end{array}
\begin{array}{c}
\mathcal{E}_R \\
\Gamma, B \vdash Ctrue
\end{array}
\begin{array}{c}
\frac{\Gamma \vdash Ctrue}{\Gamma \vdash Ctrue} \vee E
\end{array}$$

O redukcjach $\leftarrow_R$ będziemy mówili jako o **redukcjach lokalnych**. Odnosimy tu, że nie istnieją lokalne redukcje dla $\top$ oraz $\perp$, jako że $\top$ nie ma reguły eliminacji, a $\perp$ nie ma reguły wprowadzania.

Zasadę lokalnej zupełności sprawdzamy pokazując w jaki sposób można rozszerzyć dowód danego osądu do nowego dowodu, w którym reguła wprowadzania bezpośrednio poprzedza jedną lub więcej odpowiadających reguł eliminacji. Jako przykład, rozważmy dowód $\mathcal{D}$ osądu $A \wedge Btrue$. Reguły eliminacji $\wedge E_L$ oraz $\wedge E_R$ nie są zbyt słabe, albowiem sposób, w jaki dedukują swoje wnioski, a mianowicie $Atrue$ oraz $Btrue$, jest wystarczający do odtworzenia innego dowodu osądu $A \wedge Btrue$:

$$\begin{array}{c}
\mathcal{D} \\
A \wedge Btrue
\end{array}
\begin{array}{c}
\leftarrow_E \\
\frac{A \wedge Btrue}{Atrue} \wedge E_L \quad \frac{A \wedge Btrue}{Btrue} \wedge E_R
\end{array}
\begin{array}{c}
Atrue \\
Btrue
\end{array}
\begin{array}{c}
\frac{Atrue}{A \wedge Btrue} \wedge I
\end{array}$$

Gdyby reguły eliminacji były zbyt słabe (na przykład gdyby nie pozwalały na udowodnienie $Atrue$), dowodu nie dałoby się rozszerzyć.

Jako kolejny przykład rozważmy dowód $\mathcal{D}$ osądu $A \rightarrow Btrue$. Możemy odtworzyć inny dowód tego samego osądu po zastosowaniu reguły eliminacji $\rightarrow E$ do $\mathcal{D}$, co z kolei implikuje, że reguła $\rightarrow E$ nie jest zbyt słaba:

$$\frac{\frac{\mathcal{D}}{A \rightarrow Btrue} \quad \frac{\frac{\mathcal{D}}{A \rightarrow Btrue} \quad \overline{Atrue}^x}{\frac{Btrue}{A \rightarrow Btrue} \rightarrow I^x} \rightarrow E}{\frac{\mathcal{D}}{A \rightarrow Btrue} \leftarrow_E \frac{A \rightarrow Btrue}{\frac{Btrue}{A \rightarrow Btrue} \rightarrow I^x} \rightarrow E}$$

Rozszerzając dowód $\mathcal{D}$ zastosowaliśmy nową etykietę x , która nie była wcześniej wykorzystana w dowodzie $\mathcal{D}$, jako że dowolna niezwolniona hipoteza $\overline{Btrue}^x$ o tej samej etykiecie w $\mathcal{D}$ zostaje zwolniona przez regułę $\rightarrow I^x$, co skutkuje niepoprawnym dowodem, o ile $A \neq B$. Dla systemu naturalnej dedukcji opartego na osądach hipotetycznych osłabiamy dowód $\mathcal{D}$ osądu $\Gamma \vdash A \rightarrow Btrue$ celem otrzymania dowodu osądu $\Gamma, Atrue \vdash A \rightarrow Btrue$ przy odtwarzaniu nowego dowodu osądu $\Gamma \vdash A \rightarrow Btrue$:

$$\frac{\frac{\mathcal{D}}{\Gamma \vdash A \rightarrow Btrue} \quad \frac{\frac{\mathcal{D}}{\Gamma, Atrue \vdash A \rightarrow Btrue} \quad \frac{\overline{\Gamma, Atrue \vdash Atrue}}{\Gamma, Atrue \vdash Btrue} \text{Hyp}}{\frac{\Gamma, Atrue \vdash Btrue}{\Gamma \vdash A \rightarrow Btrue} \rightarrow I} \rightarrow E$$

Przypadek $\vee$ wygląda następująco:

$$\frac{\frac{\mathcal{D}}{A \vee Btrue} \quad \frac{\frac{\mathcal{D}}{A \vee Btrue} \quad \frac{\overline{Atrue}^x}{A \vee Btrue} \vee I_L \quad \frac{\overline{Btrue}^y}{A \vee Btrue} \vee I_R}{A \vee Btrue} \vee E^{x,y}$$

a w systemie naturalnej dedukcji opartym o osądy hipotetyczne:

$$\frac{\frac{\mathcal{D}}{\Gamma \vdash A \vee Btrue} \quad \frac{\frac{\mathcal{D}}{\Gamma \vdash A \vee Btrue} \quad \frac{\overline{\Gamma, Atrue \vdash Atrue}}{\Gamma, Atrue \vdash A \vee Btrue} \text{Hyp} \vee I_L \quad \frac{\overline{\Gamma, Btrue \vdash Btrue}}{\Gamma, Btrue \vdash A \vee Btrue} \text{Hyp} \vee I_R}{\Gamma \vdash A \vee Btrue} \vee E$$

O rozszerzeniach $\leftarrow_E$ będziemy mówili jako o **rozszerzeniach lokalnych**.

Jakkolwiek nie ma lokalnych redukcji dla $\top$ oraz $\perp$, istnieją lokalne rozszerzenia dla $\top$ i $\perp$. Przypomnijmy, że $\top$ i $\perp$ są "zerowymi" przypadkami koniunkcji i alternatywy, odpowiednio. Tym samym dowód $\mathcal{D}$ osądu $\top true$ rozszerza się do nowego dowodu osądu $\top true$, który używa zero reguł eliminacji i tym samym ignoruje $\mathcal{D}$:

$$\frac{}{\top true} \top I \leftarrow_E \frac{\mathcal{D}}{\top true}$$

Podobnie dowód $\perp true$ rozszerza się do nowego dowodu $\perp true$, który używa zero reguł wprowadzania:

$$\frac{\frac{\mathcal{D}}{\perp true} \perp E}{\perp true} \leftarrow_E \frac{\mathcal{D}}{\perp true}$$

Jako że każdy ze spójników spełnia zasadę lokalnej niesprzeczności i spójności, powiemy, że system naturalnej dedukcji dla logiki zdań jest lokalnie niesprzeczny i spójny. Za każdym razem, gdy rozszerzamy nasz system o nowy spójnik, kwantyfikator itp. musimy każdorazowo sprawdzić, że nowy system dalej jest lokalnie niesprzeczny i spójny, szukając odpowiadających lokalnych redukcji i rozszerzeń.