

4. WYKŁAD 4: LOGIKA ZDAŃ. ZDANIA I OSĄDY, SYSTEM NATURALNEJ DEDUKCJI DLA LOGIKI ZDAŃ.

Zajmiemy się obecnie zbudowaniem **logiki zdań**, czyli systemu logicznego bez kwantyfikatorów. Zrobimy to w stylu osądowym w duchu Pfenninga i Daviesa, którzy z kolei zaadaptowali metodologię Martin-Löfa w rozróżnianiu między osądami i zdaniami. Klasyczne podejście do logiki zdań opierało się wyłącznie na badaniu zdań.

4.1. Zdania i osądy. W osądowym sformułowaniu logiki, zdaniem nazywamy obiekt, którego **prawdziwość** można zweryfikować stosując reguły wnioskowania, podczas gdy osądem nazywamy obiekt konstruowalny bądź nie drogą dowodu. Przykładami zdań mogą być " $1+1$ jest równe 0 " lub " $1+1 = 2$ ", obydwa rozważane jako zdania w arytmetyce liczb całkowitych, zaś przykładami osądów " $1+1$ jest równe 0 jest prawdą", dla którego nie istnieje dowód, lub " $1+1$ jest równe 2 jest prawdą", dla którego istnieje dowód.

Aby lepiej zrozumieć tę różnicę, rozważmy wyrażenie "*księżyc jest zrobiony z sera*". Takie wyrażenie nie jest obiektem do weryfikacji, ani nie jest zdaniem, jako że nie ma sposobu sprawdzenia jego prawdziwości – wyrażenie to stanie się zdaniem jedynie wtedy, jeżeli podamy je w kontekście pewnych reguł wnioskowania. Oto przykład takiej reguły, zapisanej w nieco przesadnie pedantyczny sposób:

$$\frac{\text{"księżyc jest bladozielony i ma dziury" jest prawdą}}{\text{"księżyc jest zrobiony z sera" jest prawdą}} KsieycSer$$

Teraz możemy spróbować przeprowadzić dowód zdania na przykład robiąc zdjęcie księżyca. Zauważmy, że nadal nie wiemy, czy zdanie jest prawdziwe, czy nie, ale mając daną powyższą regułę wnioskowania przynajmniej jesteśmy w stanie stwierdzić jak można je zweryfikować. Jeżeli na naszym zdjęciu księżyca zobaczymy bladozielony obiekt z dziurami, to wówczas na podstawie naszej reguły wnioskowania stwierdzamy prawdziwość osądu "księżyc jest zrobiony z sera". Tym samym prawdziwość osądu "księżyc jest zrobiony z sera" jest udowodniona dzięki zdjęciu księżyca i regule wnioskowania. Na tym przykładzie widzimy, że zdanie jest obiektem podlegającym weryfikacji, które może być prawdziwe bądź nie, podczas gdy osąd jest fragmentem wiedzy, który znamy lub nie, w zależności od istnienia dowodu.

Jest ważne, że pojęcie osądu jest bardziej priorytetowe niż pojęcie zdania. Mówiąc prosto, pojęcie osądu nie zależy od pojęcia zdania i musimy wprowadzić nowe rodzaje osądów nie używając konkretnych zdań. Z drugiej strony, zdania są zawsze możliwe do wyjaśnienia przy użyciu istniejących osądów, które zawierają przynajmniej osądy prawdziwe, jako że zdaniom muszą towarzyszyć reguły wnioskowania służące określaniu, czy są prawdziwe.

Rozwijając formalny system logiki zdań będziemy używać dwóch osądów: $A \text{ prop}$ oraz $A \text{ true}$:

$$\begin{aligned} A \text{ prop} &\Leftrightarrow A \text{ jest zdaniem} \\ A \text{ true} &\Leftrightarrow A \text{ jest prawdziwe} \end{aligned}$$

$A \text{ prop}$ zostaje udowodnione dzięki obecności reguły wnioskowania pozwalającej wywieść $A \text{ true}$. Zdefiniujemy indukcyjnie zbiór zdań używając spójników binarnych (to znaczy implikacji $\rightarrow$, koniunkcji $\wedge$ i alternatywy $\vee$) oraz unarnego (to znaczy negacji $\neg$). Reguły wnioskowania zostaną zapisane w ten sposób, aby definicja jednego spójnika nie wykorzystywała definicji innych spójników. Powiemy, że otrzymany w ten sposób system dedukcyjny jest **ortogonalny** w takim sensie, iż wszelkie spójniki mogą być wprowadzone niezależnie od pozostałych.

Zadanie 6. Załóżmy, że $\neg A$ jest zdaniem oznaczającym logiczną negację zdania A oraz A false jest osądem oznaczającym “ A nie może być prawdziwe. Co jest złego w regule $\frac{\neg A \text{ true}}{A \text{ false}} \neg E$ mającej wyjaśniać pojęcie fałszywych osądów? A co z regułą $\frac{A \text{ false}}{\neg A \text{ true}} \neg I$?

Zadanie 7. Dlaczego reguła $\frac{\neg A \vee B \text{ true}}{A \rightarrow B \text{ false}} \rightarrow I$ jest zła, poza tym, że wygląda dość dziwnie?

4.2. System naturalnej dedukcji dla logiki zdań. Naturalna dedukcja jest zasadą budowania systemów logicznych których głównymi pojęciami są reguły wnioskowania **wprowadzania** oraz **eliminacji**. Reguła wprowadzania wyjaśnia w jaki sposób można wydedukować prawdziwy osąd wykorzystujący konkretny spójnik, przy użyciu prawdziwych osądów jako przesłanek. Innymi słowy, reguła ta wyjaśnia, jak “wprowadzić” spójnik w procesie dedukcji. Na przykład, reguła wprowadzania dla spójnika koniunkcji wyglądałaby tak:

$$\frac{\dots}{A \wedge B \text{ true}} \wedge I$$

Pojęciem dualnym do reguły wprowadzania jest reguła eliminacji, która wyjaśnia w jaki sposób można wykorzystać prawdziwy osąd wykorzystujący konkretny spójnik celem wywnioskowania innego osądu. Innymi słowy, reguła ta wyjaśnia, jak “wyeliminować” spójnik w procesie dedukcji. Na przykład, reguła eliminacji dla spójnika koniunkcji wyglądałaby tak:

$$\frac{A \wedge B \text{ true}}{\dots} \wedge E$$

Reguła wprowadzania na ogół pokrywa się z intuicyjnym wyobrażeniem o działaniu danego spójnika i dlatego jest relatywnie prosta do zaprojektowania. Dla kontrastu, reguła eliminacji ekstrahuje informacje reprezentowaną przez osąd i jej zaprojektowanie wymaga szczególnej uwagi celem uniknięcia sytuacji, w której dany system mógłby być sprzeczny. Na przykład, źle zaprojektowana reguła eliminacji może być na tyle silna, że będzie ekstrahowała nieprawdziwe informacje, których nie będzie się dało udowodnić przez odpowiadającą regułę wprowadzania. Z drugiej strony, źle zaprojektowana reguła eliminacji może być zbyt słaba, aby wydedukować cokolwiek interesującego. Zauważmy, że reguła wprowadzania jest w pewnym sensie ważniejsza od reguły eliminacji, jako że bez reguły wprowadzania nie ma sensu projektować odpowiedniej reguły eliminacji. Innymi słowy, reguła eliminacji nie może być rozpatrywana w oderwaniu od odpowiadającej jej reguły wprowadzania, podczas gdy zaprojektowanie reguły wprowadzania nie musi pociągać projektowania odpowiedniej reguły eliminacji.

Poniżej rozwinieśmy system naturalnej dedukcji dla logiki zdań, rozpoczynając od spójnika koniunkcji.

4.2.1. Koniunkcja. Zanim zajmniemy się regułami wnioskowania dla koniunkcji, musimy rozpoznać w jaki sposób można poprawnie budować zdania z wykorzystaniem tego spójnika. Tym samym potrzebujemy reguły **formowania** aby wyrazić, że $A \wedge B$ jest zdaniem, gdy zarówno A jak i B są zdaniami:

$$\frac{A \text{ prop} \quad B \text{ prop}}{A \wedge B \text{ prop}} \wedge F$$

Aby jakoś uzasadnić regułę $\wedge F$ potrzebujemy reguły wnioskowania dla dowodzenia prawdziwości $A \wedge B$ przy założeniu istnienia reguł wnioskowania dla dowodzenia prawdziwości A oraz B . Jako że $A \wedge B$ ma w zamyśle być prawdziwe wtedy, gdy zarówno A jak i B są prawdziwe, użyjemy następującej reguły wprowadzania definiującej $A \wedge B$ jako zdanie:

$$\frac{A \text{ true} \quad B \text{ true}}{A \wedge B \text{ true}} \wedge I$$

Reguła $\wedge I$ mówi, że jeśli zarówno A jak i B są prawdziwe, to również $A \wedge B$ jest prawdziwe. Zgadza się to z naturalną interpretacją reguły wnioskowania: jeśli zachodzą przesłanki, zachodzi też wniosek. Teraz możemy użyć reguły $\wedge I$ do skonstruowania dowodu $A \wedge B$ przy danych dowodach $\mathcal{D}_A$ osądu A *true* oraz $\mathcal{D}_B$ osądu B *true*; napiszemy $\frac{\mathcal{D}_A}{Atrue}$ dla oznaczenia, że $\mathcal{D}_A$ jest dowodem A *true* zawierającym przynajmniej jedną regułę wnioskowania, której wnioskiem jest A *true*:

$$\frac{\frac{\mathcal{D}_A}{Atrue} \quad \frac{\mathcal{D}_B}{Btrue}}{A \wedge Btrue} \wedge I$$

Zaprojektowanie reguły eliminacji dla koniunkcji zaczyna się od rozważenia $A \wedge B$ jako przesłanki. Jako że $A \wedge B$ *true* wyraża fakt, że zarówno A jak i B są prawdziwe, z $A \wedge B$ *true* możemy wywnioskować zarówno A *true* jak i B *true*, tak jak widać z konstrukcji następujących dwóch reguł eliminacji dla koniunkcji:

$$\frac{A \wedge Btrue}{Atrue} \wedge E_L \quad \frac{A \wedge Btrue}{Btrue} \wedge E_R$$

4.2.2. *Implikacja.* Spójnik implikacji wymaga wprowadzenia pojęcia **hipotetycznego dowodu**, a więc dowodu zawierającego hipotezy. Zaczynamy od reguły formowania:

$$\frac{Aprop \quad Bprop}{A \rightarrow Bprop} \rightarrow F$$

Intuicja związana ze spójnikiem implikacji podpowiada nam, że $A \rightarrow B$ *true* zachodzi gdykolwiek A *true* implikuje B *true*, lub że hipoteza A *true* prowadzi do dowodu B *true*. Hipotezę A *true* będziemy zapisywali jako $\overline{Atrue}^x$ i tym samym otrzymujemy następującą regułę wprowadzania:

$$\frac{\overline{Atrue}^x \quad \vdots \quad Btrue}{A \rightarrow Btrue} \rightarrow I^x$$

Możemy bezpośrednio wydedukować A *true* przy użyciu hipotezy $\overline{Atrue}^x$ gdziekolwiek będzie to konieczne w dowodzie B *true*.

Przesłanka reguły $\rightarrow I^x$ jest przykładem dowodu hipotetycznego albowiem zawiera hipotezę, a więc osąd, o którym zakładamy, że jest prawdziwy. Powiemy, że reguła $\rightarrow I$ **uwnętrznia** dowód hipotetyczny w swoim założeniu jako zdanie $A \rightarrow B$ w takim sensie, że prawdziwość $A \rightarrow B$ w zwarty sposób odzwierciedla wiedzę reprezentowaną przez dowód hipotetyczny.

Odnosimy tu trzy fakty związane z regułą $\rightarrow I^x$. Po pierwsze, zarówno hipotezę $\overline{Atrue}^x$ jak i nazwę reguły $\rightarrow I$ oznaczamy tą samą etykietą x . Tym samym etykieta w hipotezie oznacza z której reguły wnioskowania wywodzi się dana hipoteza. Nie jest konieczne oznaczać wszystkie hipotezy różnymi etykietami, o ile nie ma konfliktu oznaczeń pomiędzy dwiema hipotezami o tej samej etykiecie. Na przykład, następujące rozumowanie jest czytelne w zapisie, pomimo tego, że dwie hipotezy zostały oznaczone taką samą etykietą x :

$$\frac{\frac{\overline{Atrue}^x \quad \vdots \quad Btrue}{A \rightarrow Btrue} \rightarrow I^x \quad \frac{\overline{A'true}^x \quad \vdots \quad B'true}{A' \rightarrow B'true} \rightarrow I^x}{(A \rightarrow B) \wedge (A' \rightarrow B')true}$$

Po drugie, hipoteza $\overline{Atrue}^x$ jest w użyciu tylko jako przesłanka reguły $\rightarrow I^x$. Innymi słowy, jej zakres jest ograniczony do przesłanek reguły $\rightarrow I^x$. Po tym, gdy reguła $\rightarrow I^x$ została wykorzystana do wydedukowania $A \rightarrow B \text{ true}$, hipoteza $\overline{Atrue}^x$ nie może być dalej używana jako poprawna hipoteza. Na przykład, poniższy dowód nie może wykorzystać hipotezy $\overline{Atrue}^x$ w dowodzie $\mathcal{D}_A$ osądu $A \text{ true}$, który leży poza zasięgiem $\overline{Atrue}^x$:

$$\frac{\mathcal{D}_A \quad \frac{\overline{Atrue}^x \quad \vdots \quad Btrue}{A \rightarrow Btrue} \rightarrow I^x}{A \wedge (A \rightarrow B)true} \wedge I$$

Powiemy, że hipoteza jest **zwolniona**, jeżeli odpowiadająca jej reguła wnioskowania została zastosowana i wychodzimy z zakresu jej obowiązywania.

Zauważmy, że jakkolwiek przesłanka reguły $\rightarrow I^x$ jest dowodem hipotetycznym, to cały dowód **nie** jest hipotetyczny. Dokładniej, dowód $\mathcal{D}$ poniżej jest hipotetyczny, ale dowód $\mathcal{E}$ już nie:

$$\mathcal{E} \left\{ \frac{\mathcal{D} \left\{ \overline{Atrue}^x \quad \vdots \quad Btrue \right\}}{A \rightarrow Btrue} \rightarrow I^x \right.$$

Powodem, dla którego dowód $\mathcal{E}$ nie jest hipotetyczny jest fakt, że hipoteza $\overline{Atrue}^x$ została zwolniona kiedy zastosowana została reguła $\rightarrow I^x$ i tym samym nie jest już widoczna z zewnątrz. Innymi słowy możemy w dowolny sposób używać hipotez nie zmieniając dowodu w dowód hipotetyczny pod warunkiem, że przed zakończeniem rozumowania każdą z nich zwolnimy.

Po trzecie, hipoteza $\overline{Atrue}^x$ może być użyta nie tylko jeden raz, ale tyle razy, ile będzie to konieczne. Z drugiej strony nikt nie zmusza nas do stosowania danej hipotezy, równie dobrze możemy ją zignorować w toku rozumowania. Oto przykłady dowodów, w których hipoteza $\overline{Atrue}^x$ została, odpowiednio, zignorowana, użyta raz i użyta dwa razy:

$$\frac{\overline{Btrue}^y \quad \overline{Atrue}^x}{\frac{A \rightarrow Btrue}{B \rightarrow (A \rightarrow B)true} \rightarrow I^y} \rightarrow I^x \quad \frac{\overline{Atrue}^x}{A \rightarrow Atrue} \rightarrow I^x \quad \frac{\overline{Atrue}^x \quad \overline{Atrue}^x}{\frac{A \wedge Atrue}{A \rightarrow (A \wedge A)true} \rightarrow I^x} \wedge I$$

Tak samo jak w przypadku reguł eliminacji dla koniunkcji, konstrukcję reguły eliminacji dla implikacji rozpoczynamy od przesłanki $A \rightarrow B \text{ true}$. Jako że $A \rightarrow B \text{ true}$ wyraża to, że $A \text{ true}$ pociąga $B \text{ true}$, jedynym sposobem, w jaki można to spożytkować jest użycie dowodu $A \text{ true}$ do wywnioskowania $B \text{ true}$. Tym samym reguła eliminacji dla implikacji będzie wykorzystywała zarówno $A \rightarrow B \text{ true}$ jak i $A \text{ true}$ jako przesłanki:

$$\frac{A \rightarrow Btrue \quad Atrue}{Btrue} \rightarrow E.$$

Następujący prosty przykład dowodzi $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$ przy użyciu reguły $\rightarrow E$:

$$\frac{\frac{\frac{A \rightarrow Btrue^x}{Btrue} \rightarrow I^y}{A \rightarrow Btrue} \rightarrow I^x}{(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)true} \rightarrow E$$

Zauważmy, że możemy też udowodnić $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)true$ bezpośrednio z wykorzystaniem hipotezy $\overline{A \rightarrow Btrue}^x$.

Podajmy jeszcze dwa przykłady z użyciem zarówno koniunkcji jak i implikacji. Poniższe dowody pokazują, że $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ oraz $(A \wedge B) \rightarrow C$ są logicznie równoważne, jako że każde z nich pociąga drugie; istotnie mamy:

$$\frac{\frac{\frac{A \rightarrow (B \rightarrow C)^x true}{B \rightarrow Ctrue} \rightarrow E}{(A \wedge B) \rightarrow Ctrue} \rightarrow I^y}{(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)true} \rightarrow I^x$$

oraz

$$\frac{\frac{\frac{\frac{Atrue^y}{A \wedge Btrue} \wedge I}{B \rightarrow Ctrue} \rightarrow I^z}{A \rightarrow (B \rightarrow C)true} \rightarrow I^y}{((A \wedge B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))true} \rightarrow I^x$$

4.2.3. *Alternatywa.* Tak jak w przypadku koniunkcji i implikacji, spójnik alternatywy jest binarny, a więc w szczególności reguła formowania będzie wyglądała następująco:

$$\frac{Aprop \quad Bprop}{A \vee Bprop} \vee F$$

W zamierzeniu $A \vee B$ ma być prawdziwe wtedy, gdy A jest prawdziwe, albo B jest prawdziwe, ale niekoniecznie będziemy wiedzieli, która z powyższych dwóch alternatyw zachodzi. Tym samym reguła wprowadzania dla spójnika $\vee$ wnioskuje $A \vee Btrue$ z dowodu $Atrue$ lub $Btrue$:

$$\frac{Atrue}{A \vee Btrue} \vee I_L \quad \frac{Btrue}{A \vee Btrue} \vee I_R$$

Konstrukcja reguł eliminacji dla alternatywy nie jest oczywista. Wnioskowanie $Atrue$ oraz $Btrue$ na podstawie $A \vee Btrue$ byłoby zbyt silne i zarazem niepradziwe – wiemy jedynie, iż zachodzi jeden z osądów $Atrue$ lub $Btrue$, ale prawdopodobnie nie obydwa naraz.

Jako że nie wiadomo który z osądów $Atrue$ lub $Btrue$ może być wywnioskowany z dowodu $A \vee Btrue$, jedyny logiczny sposób na wyzyskanie informacji z $A \vee Btrue$ to rozważanie obydwu możliwości jednocześnie. Jeżeli będziemy w stanie udowodnić $Ctrue$ zarówno z $Atrue$ jak i z $Btrue$, dla pewnego zdania C , to wówczas będziemy mogli wywnioskować $Ctrue$ z $A \vee Btrue$, jako że $Ctrue$ zachodzi niezależnie od tego, w jaki sposób został zbudowany dowód $A \vee Btrue$. Tym samym reguła eliminacji dla alternatywy odzwierciedla następujący tryb rozumowania:

$$\begin{array}{c}
\overline{Atrue}^x \quad \overline{Btrue}^y \\
\vdots \quad \vdots \\
Ctrue \quad Ctrue \\
\hline
Ctrue \quad \vee E^{x,y}
\end{array}$$

Zauważmy, że $Atrue$ i $Btrue$ są wprowadzone jako nowe hipotezy i oznaczone innymi etykietami x i y . Tak jak w przypadku reguły eliminacji $\rightarrow$, zakres ich działania jest ograniczony od odpowiadających im przesłanek reguły $\vee E^{x,y}$ (to znaczy $\overline{Atrue}^x$ do drugiej przesłanki i $\overline{Atrue}^y$ do trzeciej przesłanki), co oznacza, że obydwie hipotezy zostają zwolnione gdy $Ctrue$ zostaje wydedukowane we wniosku.

Inaczej niż w przypadku reguł eliminacji dla koniunkcji i implikacji, reguła eliminacji dla alternatywy wykorzystuje $A \vee Btrue$ nie wprost, a więc tak, że jej wniosek zawiera zdanie C które nie musi być zdaniem A , B lub ich kombinacją. Innymi słowy, gdy stosujemy regułę eliminacji dla $A \vee Btrue$, sami musimy wybrać zdanie C (które może być całkowicie niezwiązane z A i B) takie, że $Ctrue$ jest dowodliwe zarówno z $Atrue$ jak i z $Btrue$. Z tego powodu uwzględnienie alternatywy w systemie logicznym istotnie utrudnia badanie własności metalogicznych systemu, jak już wkrótce zobaczymy.

Jako trywialny przykład zastosowania eliminacji dla alternatywy udowodnimy, że $Atrue$ jest silniejsze od $A \vee Btrue$:

$$\frac{\frac{\overline{Atrue}^x}{A \vee Btrue} \vee I_L}{A \rightarrow (A \vee B)true} \rightarrow I^x$$

Odwrotność powyższego twierdzenia nie jest prawdziwa, a zatem $A \vee Btrue$ jest silnie słabsza niż $Atrue$, jako że nie ma sposobu na udowodnienie $Atrue$ from $Btrue$ dla dowolnych zdań A i B :

$$\begin{array}{c}
\overline{A \vee Btrue}^x \quad \overline{Atrue}^y \quad \overline{Btrue}^z \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad (\text{niemożliwe}) \\
Atrue \\
\hline
\frac{Atrue}{(A \vee B) \rightarrow Atrue} \rightarrow I^x \quad \vee E^{y,z}
\end{array}$$

Jako kolejny przykład udowodnimy, że spójnik alternatywy jest przemienny:

$$(A \vee B) \rightarrow (B \vee A)true$$

Zacniemy od zastosowania reguły $\rightarrow I$ tak, aby zredukować problem do udowodnienia $B \vee Atrue$ z $A \vee Btrue$:

$$\frac{\overline{A \vee Btrue}^x \quad \vdots \quad B \vee Atrue}{((A \vee B) \rightarrow (B \vee A)true) \rightarrow I^x}$$

Począwszy od tego momentu dowód możemy prowadzić od dołu do góry stosując reguły wprowadzania $\vee I_L$ i $\vee I_R$ do osądu $B \vee Atrue$, lub od góry do dołu stosując regułę eliminacji $\vee E$ do osądu $A \vee Btrue$. W pierwszym przypadku prędzej czy później utkniemy w martwym punkcie, albowiem nie jest możliwe udowodnienie $Atrue$ lub $Btrue$ z $A \vee Btrue$. Na przykład, nie jesteśmy w stanie wypełnić dziury w następującym dowodzie:

$$\frac{\frac{\frac{\overline{A \vee B true}^x}{\vdots} B true}{B \vee A true} \vee I_L}{((A \vee B) \rightarrow (B \vee A) true) \rightarrow I^x}$$

W drugim przypadku problem redukuje się do dowiedzenia osobno $B \vee A true$ z $A true$ oraz $B true$, co można łatwo uzyskać stosując reguły wnioskowania dla alternatywy:

$$\frac{\frac{\overline{A \vee B true}^x}{\frac{\overline{A true}^y}{B \vee A true} \vee I_R} \quad \frac{\overline{B true}^z}{B \vee A true} \vee I_L}{B \vee A true} \vee E^{y,z} \rightarrow I^x$$

Zadanie 8. Możemy przepisać regułę eliminacji dla alternatywy z wykorzystaniem spójnika implikacji zamiast dowodów hipotetycznych:

$$\frac{A \vee B true \quad A \rightarrow C true \quad B \rightarrow C true}{C true} \vee E$$

Dlaczego nie używamy takiej reguły wnioskowania?

4.2.4. *Prawda i fałsz.* Prawda $\top$ jest zdaniem, o którym zakładamy, że jest zawsze prawdziwe. Tym samym osąd $\top true$ nie wymaga dowodu, co oznaczamy przez brak przesłanek w jego regule wprowadzania:

$$\frac{}{\top prop} \top F \quad \frac{}{\top true} \top I$$

W jaki sposób wykorzystujemy zatem dowód $\top true$ w regule eliminacji? Jako że nie musimy niczego dowodzić w dowodzie $\top true$, logicznie rzecz biorąc dowód ten nie ma żadnej zawartości, a więc nie ma żadnego interesującego sposobu, aby go wykorzystać. Tym samym spójnik $\top$ nie ma reguły eliminacji.

Fałsz $\perp$ jest zdaniem, które nigdy nie jest prawdziwe lub, równoważnie, którego prawdziwość jest niemożliwa do ustalenia. Intuicyjnie rozumiemy je jako logiczną sprzeczność, której pod żadnym pozorem nie można dowieść. Tym samym nie ma reguły wprowadzania dla $\perp$. Paradoksalnie istnieje wszakże reguła eliminacji dla $\perp$. Przypuśćmy bowiem, że dysponujemy dowodem $\perp true$. Jeśli wyobrazimy sobie $\perp true$ jako coś niemożliwego do udowodnienia, albo jako coś możliwie najtrudniejszego do udowodnienia, to istnienie takiego dowodu oznaczałoby, że jesteśmy w stanie dowieść wszystko (a więc wszystko co, w szczególności, nie jest trudniejsze do dowiedzenia niż $\perp true$). Tym samym reguła eliminacji dla $\perp$ wnioskuje $C true$ dla dowolnego zdania C :

$$\frac{}{\perp prop} \perp F \quad \frac{\perp true}{C true} \perp E$$

Zastanówmy się jednak, po co jest nam potrzebna reguła eliminacji dla $\perp$, skoro nie jest możliwe udowodnienie $\perp true$? Zauważmy wszakże, że wprawdzie nie jest możliwe udowodnienie $\perp true$ "z niczego", ale oczywiście jest możliwe udowodnienie $\perp true$ z wykorzystaniem hipotez. Na przykład $\perp true$ w przesłance reguły $\perp E$ sama może być hipotezą, jak w następującym dowodzie:

$$\frac{\frac{\overline{\perp true}^x}{C true} \vee E}{\perp \rightarrow C true} \rightarrow I^x$$

Zasadniczo nie ma niczego nieprawidłowego w zakładaniu, że coś niemożliwego do dowodu zostało jednak jakoś udowodnione.

Powiemy, że system logiczny jest **niespójny** jeżeli $\perp true$ jest dowodliwy oraz **spójny** w przeciwnym wypadku. Niespójny system jest z naszego punktu widzenia bezużyteczny, jako że osąd $Atrue$ jest dowodliwy dla dowolnego zdania A . W dalszej części niniejszego wykładu udowodnimy, że zbudowany przez nas system logiki zdań jest spójny – jest to bardzo ważne twierdzenie, którego dowód był prawdziwym kamieniem milowym w rozwoju logiki.

Prawda $\top$ i fałsz $\perp$ mogą być też rozważane jako ”puste” przypadki koniunkcji i alternatywy, odpowiednio. Rozważmy bowiem ogólny przypadek n -krotnej koniunkcji $\bigwedge_{i=1}^n A_i$ z jedną regułą wprowadzania i n regułami eliminacji:

$$\frac{A_i true \text{ dla } i = 1, \dots, n}{\bigwedge_{i=1}^n A_i true} \wedge I \qquad \frac{\bigwedge_{i=1}^n A_i true}{A_i true} \wedge E_i, i = 1, \dots, n$$

Jeżeli przyjmiemy, iż $\top = \bigwedge_{i=1}^0 A_i$, to reguła $\wedge I$ zmienia się w regułę $\top I$, jako że będzie miała wówczas pusty zbiór przesłanek, zaś każda z reguł $\wedge E_i$ zniknie. Podobnie ogólny przypadek n -krotnej alternatywy $\bigvee_{i=1}^n A_i$ ma n reguł wprowadzania i jedną regułę eliminacji:

$$\frac{A_i true}{\bigvee_{i=1}^n A_i true} \vee I_i, i = 1, \dots, n \qquad \frac{\overline{A_i true}^{x_i} \quad \bigvee_{i=1}^n A_i true \quad \vdots \quad \text{dla } i = 1, \dots, n}{Ctrue} \vee E^x$$

Jeżeli przyjmiemy $\perp = \bigvee_{i=1}^0 A_i$, to każda z reguł $\vee I_i$ znika, a reguła $\vee E$ zamienia się w regułę $\perp E$.

Jest teraz jasne, że $\top$ i $\perp$ grają rolę identyczności dla spójników $\wedge$ i $\vee$. Na przykład, możemy zidentyfikować $A \wedge \top$ z A : jeżeli $Atrue$ jest dowodliwy, to wówczas $A \wedge \top true$ jest również dowodliwy, jako że $\top true$ zachodzi automatycznie; dowód w drugą stronę wykorzystuje regułę $\wedge E_L$. W podobny sposób możemy zidentyfikować $A \vee \perp$ z A : jeśli $A \vee \perp true$ jest dowodliwe, to $Atrue$ musi być również dowodliwe, jako że drugi składnik alternatywy $\perp true$ nie może zostać użyty; dowód w drugą stronę wykorzystuje regułę $\vee I_L$.

4.2.5. *Negacja*. Jedyny spójnik unarny w logice zdań to negacja:

$$\frac{Aprop}{\neg Aprop} \neg F$$

$\neg A$ czytamy jako ”nie A ” lub ”negacja A ”. Zdanie to oznacza logiczną negację zdania A i jego prawdziwość oznacza, iż A nie może być prawdziwe. Poniżej rozważymy trzy różne podejścia to zaprojektowania reguł wnioskowania dla negacji, z których każde dostarczy metod wyrażenia tego, iż A nie może być prawdą.

Pierwsze podejście polega na zdefiniowaniu osądu fałszu $Afalse$ oznaczającego ” A nie może być prawdą”, a następnie zastosowaniu następujących reguł celem wydedukowania i wyzyskania osądu $\neg Atrue$:

$$\frac{Afalse}{\neg Atrue} \neg I \qquad \frac{\neg Atrue}{Afalse} \neg E$$

Nie będziemy dyskutować reguł wnioskowania dla wydedukowania $Afalse$. Tak jak dla reguły $\rightarrow I$, powiemy, że reguła $\neg I$ uwnętrznia $Afalse$ jako zdanie $\neg A$ w takim sensie, że prawdziwość $\neg A$ odzwierciedla wiedzę reprezentowaną przez $Afalse$.

W drugim podejściu, dedukujemy $\neg Atrue$, jeśli założenie $Atrue$ doprowadza do dowodliwości każdego osądu o prawdzie. Uzasadnienie tego podejścia jest takie, że jeżeli system logiczny jest spójny (a więc nie

każdy osąd o prawdzie jest dowodliwy), to dowodliwość każdego osądu o prawdzie, a więc niespójność systemu, jako konsekwencja założenia $Atrue$ pociąga, iż założenie musi być fałszywe, a więc A nie może być prawdą.

Chcąc być w stanie wyrazić dowodliwość każdego osądu o prawdzie, wprowadzamy **zmienną zdaniową** p , która oznacza **dowolne** zdanie. Użyjemy **parametrycznego osądu** $ptrue$, lub, inaczej mówiąc, osądu parametryzowanego zmienną zdaniową p i zdefiniujemy regułę wprowadzania dla negacji następująco:

$$\frac{\overline{Atrue}^x \quad \vdots \quad ptrue}{\neg Atrue} \neg I^{x,p}$$

Jako że przesłanka jest osądem hipotetycznym, zarówno hipotezę $\overline{Atrue}$ jak i nazwę reguły $\neg I$ oznaczamy tą samą etykietą x . Ponadto musimy oznaczyć nazwę reguły $\neg I$ zmienną zdaniową p , jako że p jest tu nową zmienną, której zakres ograniczony jest do przesłanki. Reguła eliminacji dla negacji stanowi, iż dowody obydwu osądów $\neg Atrue$ i $Atrue$ upoważniają nas do udowodnienia prawdziwości dowolnego zdania:

$$\frac{\neg Atrue \quad Atrue}{Ctrue} \neg E$$

Odnosimy, iż zdanie C pojawiające się we wniosku może być dowolnym zdaniem, także zmienną zdaniową. Jako przykład udowodnimy, że A i $\neg A$ nie mogą zachodzić równocześnie:

$$\frac{\frac{\overline{A \wedge \neg Atrue}^x}{\neg Atrue} \wedge E_R \quad \frac{\overline{A \wedge \neg Atrue}^x}{Atrue} \wedge E_L}{ptrue} \neg E$$

$$\frac{}{\neg(A \wedge \neg A)true} \neg I^{x,p}$$

Trzecie podejście używa **definicji notacyjnej** traktując $\neg A$ jako syntaktyczny skrót zdania $A \rightarrow \perp$. Innymi słowy, $\neg$ nie odgrywa żadnej roli semantycznej i skrót $\neg A$ może być po prostu rozwinięty jako $A \rightarrow \perp$. Tak rozumiana definicja uzasadnia poprawność następujących reguł wnioskowania:

$$\frac{\overline{Atrue}^x \quad \vdots \quad \perp true}{\neg Atrue} \neg I^x$$

oraz

$$\frac{\neg Atrue \quad Atrue}{\perp true} \neg E$$

Odnosimy tu, że gdyby $\neg$ został zdefiniowany jako niezależny spójnik, a nie jako konwencja notacyjna, powyższe reguły zepsułyby ortogonalność systemu, albowiem znaczenie $\neg$ zależałoby od znaczenia $\perp$. W dalszym ciągu będziemy używali trzeciego z powyżej opisanych podejść, które zdaje się być najbardziej popularnym podejściem w literaturze.

Jako przykład udowodnimy, że jeśli A jest prawdziwe, to $\neg A$ nie może być prawdziwe.

$$\frac{\frac{\overline{\neg Atrue}^y \quad \overline{Atrue}^x}{\neg \neg Atrue} \neg E}{A \rightarrow \neg \neg Atrue} \rightarrow I^x$$

Odwrotność powyższego twierdzenia, a zatem $\neg\neg A \rightarrow A_{true}$, **nie** jest dowodliwa, co w szczególności pokazuje, że osąd A_{true} jest mocno silniejszy niż $\neg\neg A_{true}$. Innymi słowy, dowód tego, że $\neg A$ nie może być prawdą nie jest wystarczający do stwierdzenia, że A jest prawdziwe. Nieudana próba dowodu $\neg\neg A \rightarrow A_{true}$ wyglądałaby następująco:

$$\frac{\overline{\neg\neg A true}^x \quad \begin{array}{c} \overline{\neg\neg A true}^x \\ :? \\ \neg A true \end{array}}{\neg E} \quad \frac{\perp true \quad \perp E}{\text{A true}} \rightarrow I^x$$

Niedowodliwość osądu $\neg\neg A \rightarrow A$ *true* jest istotną cechą zbudowane przez nas do tej pory logiki, jak również dowolnego systemu logicznego należącego do tak zwanej **logiki konstruktywistycznej** lub **intuicjonistycznej**. W logice konstruktywistycznej to, czego dowodzi $\neg A$ *true* nie jest dokładną przeciwnością tego, co dowodzi *A* *true*. Zamiast tego dowód taki dostarcza tylko pośredniej informacji o tym, że nie istnieje dowód *A* *true*, poprzez wskazanie, iż jego istnienie doprowadziłoby do logicznej sprzeczności. Na zasadzie kontrastu, **logika klasyczna** zakłada, iż każde zdanie jest albo prawdziwe, albo fałszywe, bez stanów pośrednich. Tym samym w logice klasycznej zdanie $\neg\neg A$ jest nierozróżnialne od zdania *A*, jako że zdanie *A* jest albo prawdziwe, albo fałszywe i nie mamy żadnych przesłanek aby twierdzić, że *A* nie może być fałszywe. Metoda dowodzenia prawdziwości zdań opierająca się o tabelki logiczne bazowana jest na logice klasycznej.

Na zakończenie tej części wykładu umówmy się jeszcze, że przy opuszczaniu nawiasów będziemy przestrzegali następującej hierarchii ważności spójników:

$$\neg > \wedge > \vee > \rightarrow$$