

1. WYKŁAD 1: PRELIMINARIA ALGEBRAICZNE.

1.1. **Relacje i funkcje.** Niech X i Y będą niepustymi zbiorami. Zbiór wszystkich par uporządkowanych (x, y) , $x \in X$, $y \in Y$, nazywamy **produktem** zbiorów X i Y i oznaczamy:

$$X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}.$$

Uważny czytelnik zechce zauważyć, że przyjęta przez nas definicja nie jest do końca ścisła, nigdzie bowiem nie wyjaśniamy, jak definiujemy pary uporządkowane. Dla matematycznych purystów możemy przyjąć definicję **pary uporządkowanej** wprowadzoną przez Kuratowskiego¹:

$$(x, y) = \{x, \{x, y\}\}.$$

Przez indukcję wprowadzamy pojęcie **n -ki uporządkowanej**:

$$(x_1, \dots, x_n) = ((x_1, \dots, x_{n-1}), x_n)$$

oraz **produktu n zbiorów**:

$$X_1 \times \dots \times X_n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n\}.$$

Dla uproszczenia notacji będziemy pisali

$$\prod_{i=1}^n X_i = X_1 \times \dots \times X_n$$

oraz

$$X^n = \prod_{i=1}^n X.$$

Jeżeli X i Y są niepustymi zbiorami, to **relacją ze zbioru X w zbiór Y** nazywamy podzbiór

$$R \subset X \times Y.$$

Jeżeli $(x, y) \in R$, to zwyczajowo piszemy xRy . W przypadku, gdy $X = Y$, mówimy po prostu o relacji w zbiorze X . Dla danej relacji $R \subset X \times Y$ możemy zdefiniować **relację odwrotną** $R^{-1} \subset Y \times X$ w następujący sposób:

$$(y, x) \in R^{-1} \leftrightarrow (x, y) \in R.$$

Podobnie, jeśli $R \subset X \times Y$ oraz $S \subset Y \times Z$ są relacjami, to możemy zdefiniować **złożenie relacji** $S \circ R$:

$$(x, z) \in S \circ R \Leftrightarrow \exists y \in Y [(x, y) \in R \wedge (y, z) \in S].$$

Wśród relacji na zbiorze X wyróżniamy kilka szczególnych typów: mówimy, że relacja $R \subset X \times X$ jest

- (1) **zwrotna**, jeżeli dla $x \in X$ zachodzi xRx ;
- (2) **symetryczna**, jeżeli dla $x, y \in X$ zachodzi $xRy \Rightarrow yRx$;
- (3) **antysymetryczna**, jeżeli dla $x, y \in X$ zachodzi $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$;
- (4) **przechodnia**, jeżeli dla $x, y, z \in X$ zachodzi $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$;
- (5) **spójna**, jeżeli dla $x, y \in X$ zachodzi $xRy \vee yRx$.

¹Kazimierz Kuratowski (ur. 2 lutego 1896 w Warszawie, zm. 18 czerwca 1980 w Warszawie), polski matematyk, jeden z czołowych przedstawicieli warszawskiej szkoły matematycznej.

Wśród relacji szczególnie ważne miejsce zajmują **funkcje**. Funkcją ze zbioru X w zbiór Y nazywamy relację $f \subset X \times Y$, która jest prawostronnie jednoznaczna, tzn.

$$xfy \wedge xfy' \Rightarrow y = y'.$$

Funkcje $f \subset X \times Y$ zwykle oznaczamy jako $f : X \rightarrow Y$, zaś zamiast xfy piszemy na ogół $f(x) = y$. Przypomnijmy, że funkcję $f : X \rightarrow Y$ nazywamy

- (1) **injekcją** (albo **funkcją różnowartościową**), gdy jeśli $f(x_1) = f(x_2)$, to $x_1 = x_2$, dla $x_1, x_2 \in X$;
- (2) **surjekcją** (albo **funkcją “na”**), gdy dla każdego $y \in Y$ istnieje $x \in X$ taki, że $f(x) = y$;
- (3) **bijekcją**, gdy jest injekcją i surjekcją.

Do danej funkcji zawsze istnieje relacja odwrotna, ale nie zawsze musi ona być funkcją. Prawdziwe natomiast jest następujące:

Stwierdzenie 1. *Niech $f : X \rightarrow Y$ będzie funkcją. Wówczas f jest injekcją wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje do niej funkcja odwrotna.*

Jeżeli $s : X \rightarrow Y$ i $r : Y \rightarrow X$ są funkcjami takimi, że

$$s \circ r = \text{id}_X,$$

gdzie $\text{id}_X : X \rightarrow X$ dana jest wzorem $\text{id}_X(x) = x$, to s nazywamy **sekcją**, a r **retrakcją**.

1.2. Równoważności i porządki. Wśród wszystkich relacji, jakimi będziemy się zajmować, wyszczególnimy dwa rodzaje: równoważności i porządki. **Równoważnością** nazywamy relację w zbiorze X , która jest

- (1) zwrotna,
- (2) symetryczna oraz
- (3) przechodnia.

Jeżeli $x \in X$ oraz \sim jest relacją równoważności w X , to zbiór wszystkich elementów, które są w relacji \sim z x nazywamy **klasą abstrakcji x** (lub **klasą równoważności x**) i oznaczamy

$$[x]_{\sim} = \{y \in X : x \sim y\}.$$

Gdy będzie jasne z jaką relacją akurat pracujemy, to będziemy zwyczajnie pisać $[x]$ zamiast $[x]_{\sim}$. Zbiór wszystkich klas abstrakcji relacji \sim oznaczamy przez

$$X / \sim = \{[x]_{\sim} : x \in X\}.$$

Wspomnijmy jeszcze o związku między relacjami równoważności a partycjami zbioru. **Partycją** (lub **podziałem**) zbioru X nazywamy rodzinę jego podzbiorów \mathcal{P} taką, że:

- (1) $\forall P_1, P_2 \in \mathcal{P} (P_1 \neq P_2 \Rightarrow P_1 \cap P_2 = \emptyset)$ (a zatem P_1 i P_2 są parami rozłączne) oraz
- (2) $\bigcup \{P \in \mathcal{P}\} = X$ (a więc \mathcal{P} jest pokryciem zbioru X).

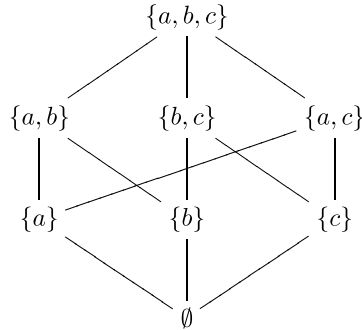
Mamy następujące:

Stwierdzenie 2. *Niech \sim będzie relacją równoważności w zbiorze X . Wówczas X / \sim jest partycją zbioru X . Na odwrót, każda partycja wyznacza relację równoważności.*

Porządkiem w zbiorze X nazywamy relację, która jest:

- (1) zwrotna,
- (2) antysymetryczna oraz
- (3) przechodnia.

Jeżeli ponadto relacja ta jest spójna, to nazywamy ją **porządkiem liniowym**. Porządki wygodnie jest czasem oznaczać przy pomocy **diagramów Hassego**: na przykład zbiór wszystkich podzbiorów zbioru trójelementowego $\{a, b, c\}$ jest uporządkowany przez relację \subset o następującym diagramie:



1.3. Algebry. **Algebrą** nazywamy strukturę $\mathbf{A} = (A, \{F_i : i \in I\})$, gdzie A jest zbiorem zwanym **uniwersum algebry**, zaś $F_i : A^{\#F_i} \rightarrow A$ (symbol $\#F_i$ oznacza ilość argumentów funkcji F_i). W rozważanych przez nas algebrach I najczęściej będzie zbiorem skończonym. **Typem** (lub **sygnaturą**) algebry $\mathbf{A} = (A, \{F_i : i \in I\})$ nazywamy układ

$$\tau_{\mathbf{A}} = (\#F_i : i \in I).$$

Algebry \mathbf{A} i \mathbf{B} są **podobne**, gdy $\tau_{\mathbf{A}} = \tau_{\mathbf{B}}$. Jeżeli $\sigma : I \rightarrow \mathbb{N}$ oraz $\tau : J \rightarrow \mathbb{N}$ spełniają warunki

- (1) $I \supset J$,
- (2) $\sigma(a) = \tau(a)$ dla $a \in J$,

to σ nazywamy **wzbogaceniem** typu τ , a τ **reduktem** typu σ .

Ważnym przykładem algebr, który będziemy bliżej studiować są monoidy. **Monoidem** nazywamy algebrę $\mathbf{M} = (M, +, 0)$ o typie $\tau_M = (2, 0)$, dla której spełnione są następujące aksjomaty:

- (1) $x + 0 = 0 + x = x$ dla wszelkich $x \in M$ (tzn. 0 jest elementem neutralnym $+$) oraz
- (2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ dla wszelkich $x, y, z \in M$ (tzn. $+$ jest łączne).

Jeżeli ponadto spełniony jest warunek

$$x + y = y + x$$

dla wszelkich $x, y \in M$, to \mathbf{M} nazywamy **monoidem przemiennym** (lub **abelowym**²).

Oznaczmy przez $\mathbb{K}(\tau)$ klasę wszystkich algebr typu τ . Niech $\mathbf{A} = (A, \{F_i : i \in I\})$ i $\mathbf{B} = (B, \{G_i : i \in I\})$ będą algebrami podobnymi. Mówimy, że \mathbf{B} jest **podalgebrą** algebry \mathbf{A} (oznaczamy $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$), gdy $B \subset A$ oraz dla każdego $i \in I$

$$G_i = F_i|_{B^{\#F_i}}$$

(symbol $|$ oznacza istotne zacieśnienie). Dalej, niech $X \subset B$. Mówimy, że X **generuje algebrę \mathbf{B}** , gdy \mathbf{B} jest najmniejszą podalgebrą algebry \mathbf{A} zawierającą uniwersum zawierające X .

²Niels Henrik Abel (ur. 5 sierpnia 1802 w Findö koło Stavanger, zm. 6 kwietnia 1829 w Frolandsvark pod Arendal), matematyk norweski. Udowodnił niemożliwość rozwiązania równania algebraicznego stopnia wyższego niż cztery przez pierwiastniki, prowadził badania w dziedzinie teorii szeregów i całek eliptycznych.

1.4. **Homomorfizmy.** Niech $\mathbf{A} = (A, \{F_i : i \in I\})$ i $\mathbf{B} = (B, \{G_i : i \in I\})$ będą algebraami podobnymi. Odwzorowanie $\phi : A \rightarrow B$ nazywamy **homomorfizmem** algebra \mathbf{A} i \mathbf{B} , co oznaczamy przez $\phi : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, gdy dla każdego $i \in I$ i dla dowolnych $a_1, \dots, a_n \in A$, gdzie $n = \sharp F_i$:

$$\phi(F_i(a_1, \dots, a_n)) = G_i(\phi(a_1), \dots, \phi(a_n)).$$

Monomorfizm jest to homomorfizm injektywny, **epimorfizm** to homomorfizm surjektywny, a **izomorfizm** to homomorfizm bijektywny.

1.5. **Algebry wolne, ilorazowe i produkty algebra.** Odtąd tam, gdzie jest to konieczne, milcząco zakładamy podobieństwo algebra \mathbf{A} i \mathbf{B} . Niech \mathbb{K} oznacza klasę algebra podobnych. Spośród licznych konstrukcji na algebrach wyróżnimy trzy: algebra wolne, ilorazowe i produkty algebra. Mówimy, że \mathbf{A} jest **algebra wolną** \mathbb{K} ze zbiorem wolnych generatorów X , gdy X generuje \mathbf{A} oraz dla każdej algebra $\mathbf{B} \in \mathbb{K}$ i dowolnego odwzorowania $\phi : X \rightarrow B$ istnieje dokładnie jedno przedłużenie ϕ do homomorfizmu algebra $\tilde{\phi} : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$. Algebra \mathbf{B} nazywamy po prostu **wolną**, gdy jest algebra wolną w klasie wszystkich algebra podobnych do \mathbf{A} .

Niech $\mathbf{A} = (A, \{F_i : i \in I\})$. **Kongruencją** algebra \mathbf{A} nazywamy relację $R \subset A \times A$ taką, że

- (1) R jest relacją równoważności,
- (2) dla każdego $i \in I$ i dla dowolnych $a_1, \dots, a_n \in A$, gdzie $n = \sharp F_i$:

$$\text{jeżeli } a_1 R b_1, \dots, a_n R b_n, \text{ to } F_i(a_1, \dots, a_n) R G(b_1, \dots, b_n).$$

Niech $\mathbf{A} = (A, \{F_i : i \in I\})$ i niech R będzie kongruencją algebra \mathbf{A} . **Algebra ilorazową** algebra \mathbf{A} nazywamy algebra

$$\mathbf{A}/R = (A/R, \{F_i^R : i \in I\}),$$

gdzie

$$F_i^R([a_1], \dots, [a_n]) = [F_i(a_1, \dots, a_n)],$$

dla każdego $i \in I$ i dla dowolnych $a_1, \dots, a_n \in A$, gdzie $n = \sharp F_i$. Epimorfizm $\kappa : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}/R$ dany wzorem

$$\kappa(a) = [a]$$

zwiemy **epimorfizmem kanonicznym**.

Na koniec niech $\{\mathbf{A}_t : t \in T\}$, przy czym $\mathbf{A}_t = (A_t, \{F_i^t : i \in I\})$, będzie rodziną algebra podobnych. **Produktem** tej rodziny nazywamy algebra

$$\prod_{t \in T} \mathbf{A}_t = \left(\prod_{t \in T} A_t, \{G_i : i \in I\} \right)$$

gdzie

$$G_i((a_t^1)_t, \dots, (a_t^n)_t) = (F_i^t(a_t^1, \dots, a_t^n))_t$$

dla dowolnych $i \in I$, a_t^1, \dots, a_t^n i $n = \sharp F_i$.