

System naturalnej dedukcji dla rachunku zdań zapisany z użyciem osądów hipotetycznych będzie wyglądał następująco:

$$\begin{array}{l} \blacktriangleright \frac{Atrue \in \Gamma}{\Gamma \vdash Atrue} \text{Hyp} \\ \blacktriangleright \frac{\Gamma, Atrue \vdash Btrue}{\Gamma \vdash A \rightarrow Btrue} \rightarrow I \\ \blacktriangleright \frac{\Gamma \vdash A \rightarrow Btrue \quad \Gamma \vdash Atrue}{\Gamma \vdash Btrue} \rightarrow E \end{array}$$

$$\blacktriangleright \frac{\Gamma \vdash Atrue \quad \Gamma \vdash Btrue}{\Gamma \vdash A \wedge Btrue} \wedge I$$

$$\blacktriangleright \frac{\Gamma \vdash A \wedge Btrue}{\Gamma \vdash Atrue} \wedge E_L$$

$$\blacktriangleright \frac{\Gamma \vdash A \wedge Btrue}{\Gamma \vdash Btrue} \wedge E_R$$

$$\blacktriangleright \frac{\Gamma \vdash Atrue}{\Gamma \vdash A \vee Btrue} \vee I_L$$

$$\blacktriangleright \frac{\Gamma \vdash Btrue}{\Gamma \vdash A \vee Btrue} \vee I_R$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee Btrue \quad \Gamma, Atrue \vdash Ctrue \quad \Gamma, Btrue \vdash Ctrue}{\Gamma \vdash Ctrue} \vee E$$

$$\blacktriangleright \frac{}{\Gamma \vdash \top true} \top I$$

$$\blacktriangleright \frac{\Gamma \vdash \perp true}{\Gamma \vdash Ctrue} \perp E$$

$$\blacktriangleright \frac{\Gamma, Atrue \vdash \perp true}{\Gamma \vdash \neg Atrue} \neg I$$

$$\blacktriangleright \frac{\Gamma \vdash \neg Atrue \quad \Gamma \vdash Atrue}{\Gamma \vdash \perp true} \neg E$$

Reguła **Hyp** odzwierciedla zwrotność osądów hipotetycznych. Wszystkie pozostałe reguły są uzasadnione ich odpowiednikami w zbudowanym przez nas wcześniej systemie naturalnej dedukcji. Jako przykład rozważmy regułę $\rightarrow I$. Przesłanka $\Gamma, Atrue \vdash Btrue$ pociąga istnienie hipotetycznego dowodu wyprowadzającego $Btrue$ z hipotez $\bar{\Gamma}$ oraz $\overline{Atrue}$:

$$\Gamma, Atrue \vdash Btrue \Leftrightarrow \begin{array}{ccc} \bar{\Gamma} & \dots & \overline{Atrue} \\ & & \vdots \\ & & Btrue \end{array}$$

Stosujemy teraz wcześniej zdefiniowaną regułę $\rightarrow I$ do wniosku $Btrue$ względem hipotezy $\overline{Atrue}$. Innymi słowy, zastosowanie reguły $\rightarrow I$ wyznacza $\overline{Atrue}$ jako odpowiadającą jej hipotezę:

$$\frac{\begin{array}{c} \overline{\Gamma} \quad \dots \quad \overline{Atrue}^x \\ \vdots \\ Btrue \end{array}}{A \rightarrow Btrue} \rightarrow I^x$$

Zauważmy, iż hipotezy w dowodzie zawierają w szczególności hipotezy $\bar{\Gamma}$, ale nie zawierają hipotezy $\overline{Atrue}^x$, która zostaje zwolniona w momencie zastosowania reguły $\rightarrow I$. Innymi słowy, mamy tu dowód hipotetyczny osądu hipotetycznego $\Gamma \vdash A \rightarrow B$:

$$\Gamma \vdash A \rightarrow Btrue \iff \frac{\begin{array}{c} \bar{\Gamma} \quad \dots \quad \overline{Atrue}^x \\ \vdots \\ Btrue \end{array}}{A \rightarrow Btrue} \rightarrow I^x$$

Tym samym możemy udowodnić $\Gamma \vdash A \rightarrow Btrue$ o ile dysponujemy dowodem $\Gamma, Atrue \vdash Btrue$, co uzasadnia poprawność reguły $\rightarrow I$.

Użycie osądów hipotetycznych eliminuje konieczność etykietowania hipotez. Jako przykład rozważmy poniższy dowód osądu hipotetycznego $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))true$:

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{Atrue, Btrue \vdash Atrue} \text{Hyp} \quad \frac{}{Atrue, Btrue \vdash Btrue} \text{Hyp} \\
 \hline
 \frac{}{Atrue, Btrue \vdash A \wedge Btrue} \wedge I \\
 \frac{}{Atrue \vdash B \rightarrow (A \wedge B)true} \rightarrow I \\
 \hline
 \vdash A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))true \rightarrow I
 \end{array}$$

Odnotujmy tu dwie obserwacje, jakie należy poczynić omawiając zmodyfikowany przed chwilą system naturalnej dedukcji. Po pierwsze, każdy liść w drzewie dedukcyjnym dla $\Gamma \vdash Ctrue$ (gdzie $\Gamma \vdash Ctrue$ jest korzeniem) powstaje przez zastosowanie reguły **Hyp** lub reguły $\top I$. W szczególności, jeżeli reguła $\top I$ nie jest użyta (co często ma miejsce), drzewo dedukcyjne ma następującą postać:

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\Gamma_1 \vdash A_1 true} \text{ Hyp} \qquad \dots \qquad \frac{}{\Gamma_n \vdash A_n true} \text{ Hyp} \\
 \vdots \\
 \Gamma \vdash Ctrue
 \end{array}$$

Po drugie, zbiór przesłanek zawsze rozszerza się do reguły wnioskowania, gdy poruszamy się od wniosku do jego przesłanek (a zatem od dołu do góry dowodu). Innymi słowy, reguła $\frac{\Gamma' \vdash Atrue...}{\Gamma \vdash Ctrue}$ spełnia warunek $\Gamma \subset \Gamma'$. W szczególności powyższe drzewko dedukcyjne dla $\Gamma \vdash Ctrue$ spełnia warunki $\Gamma \subset \Gamma_1, \dots, \Gamma \subset \Gamma_n$.

Zasady osłabiania i ściągnięcia możemy teraz wysłowić w następujący sposób:

Twierdzenie (własności strukturalne)

1. (*Oslabianie*). Jeżeli $\Gamma \vdash C_{\text{true}}$, to wówczas $\Gamma, A_{\text{true}} \vdash C_{\text{true}}$.
2. (*Ściąganie*). Jeżeli $\Gamma, A_{\text{true}}, A_{\text{true}} \vdash C_{\text{true}}$, to wówczas $\Gamma, A_{\text{true}} \vdash C_{\text{true}}$.

Dowód.

Dowód prowadzimy przez indukcję względem struktury dowodów $\Gamma \vdash Ctrue$ oraz $\Gamma, Atrue, Atrue \vdash Ctrue$. Dla zasady osłabiania, dowód $\Gamma, Atrue \vdash Ctrue$ ma dokładnie taką samą strukturę jak dowód $\Gamma \vdash Ctrue$. Tym samym jeżeli możemy zastosować indukcję strukturalną do $\Gamma \vdash Ctrue$, tym bardziej możemy ją zastosować do $\Gamma, Atrue \vdash Ctrue$. Podobne rozumowanie stosujemy dla ściągania.



Dowodliwość zasady podstawiania potwierdza, iż nasz system logiczny odpowiada definicji osądu hipotetycznego. Innymi słowy, gdyby zasada podstawiania była niemożliwa do udowodnienia, oznaczałoby to, iż jedna z podanych przez nas reguł wnioskowania nie została zaprojektowana zgodnie z zasadami obowiązującymi między osądami hipotetycznymi i dowodami hipotetycznymi.

Twierdzenie

(Podstawianie.) Jeżeli $\Gamma \vdash A_{\text{true}}$ oraz $\Gamma, A_{\text{true}} \vdash C_{\text{true}}$, to wówczas $\Gamma \vdash C_{\text{true}}$.

Zadanie

Do którego z osądów należy zastosować indukcję strukturalną w dowodzie powyższego twierdzenia, do $\Gamma \vdash A_{\text{true}}$ czy do $\Gamma, A_{\text{true}} \vdash C_{\text{true}}$? Dlaczego?

Zanim przystąpimy do dowodu powyższego twierdzenia, warto spróbować przewidzieć jak dowód będzie przebiegał. Na przykład pomocne będzie ustalenie do którego z osądów $\Gamma \vdash Atrue$ oraz $\Gamma, Atrue \vdash Ctrue$ należy zastosować indukcję strukturalną. Dla uproszczenia założmy, że reguła $\top I$ nie jest użyta w dowodzie $\Gamma, Atrue \vdash Ctrue$ (dowód $\Gamma \vdash Atrue$ może z kolei używać reguły $\top I$). Wówczas drzewo dedukcyjne dla dowodu $\Gamma, Atrue \vdash Ctrue$ będzie miało następującą postać:

$$\frac{}{\Gamma_1, Atrue \vdash C_1true} \text{Hyp} \qquad \dots \qquad \frac{}{\Gamma_n, Atrue \vdash C_ntrue} \text{Hyp}$$

$$\vdots$$

$$\Gamma, Atrue \vdash Ctrue$$

gdzie każdy z liści $\frac{}{\Gamma_i, Atrue \vdash C_itrue} \text{Hyp}$ spełnia warunek $\Gamma \subset \Gamma_i, i \in \{1, \dots, n\}$.

Rozważmy teraz i -ty liść. Jeżeli $C_i true \in \Gamma_i$, to przesłanka $Atrue$ w $\Gamma_i, Atrue \vdash C_i true$ nie odgrywa roli w dowodzie i liść można bezpiecznie zastąpić liściem $\frac{}{\Gamma_i \vdash C_i true}$ Hyp. Jeśli $C_i = A$, to wówczas osłabiamy $\Gamma \vdash Atrue = \Gamma \vdash C_i true$ aby uzyskać $\Gamma_i \vdash C_i true$, które następnie jest podstawiane za $\Gamma_i, Atrue \vdash C_i true$. W rezultacie żaden z liści nie będzie zawierał $Atrue$ jako przesłanki, a więc stosując opisane powyżej zmiany dla całego drzewa aż do korzenia, przekształcimy drzewo dedukcyjne w nowe drzewo dla $\Gamma \vdash Ctrue$. Tym samym będziemy analizować strukturę dowodu $\Gamma, Atrue \vdash Ctrue$ aby zlokalizować wszystkie jego liście. Innymi słowy, będziemy stosować indukcję strukturalną dla $\Gamma, Atrue \vdash Ctrue$.

Dowód:

Dowód prowadzimy przez indukcję względem struktury dowodu $\Gamma, Atrue \vdash Ctrue$. Musimy rozważyć trzy przypadki: Hyp, $\rightarrow$ I oraz $\rightarrow$ E.

Przypadek $\frac{Ctrue \in \Gamma}{\Gamma, Atrue \vdash Ctrue}$ Hyp:
 $\Gamma \vdash Ctrue$ wobec reguły Hyp dla $Ctrue \in \Gamma$.

Przypadek $\frac{}{\Gamma, Atrue \vdash Ctrue}$ Hyp gdzie $A = C$:
 $\Gamma \vdash Ctrue$ wobec założenia $\Gamma \vdash Atrue$.

$$\begin{array}{l} \text{Przypadek } \frac{\Gamma, Atrue, C_1true \vdash C_2true}{\Gamma, Atrue \vdash C_1 \rightarrow C_2true} \rightarrow I \text{ gdzie } C = C_1 \rightarrow C_2: \\ \Gamma, C_1true \vdash Atrue \quad \text{wobec osłabienia } \Gamma \vdash Atrue \\ \Gamma, C_1true \vdash C_2true \quad \text{wobec założenia indukcyjnego dla } \\ \Gamma, Atrue, C_1true \vdash C_2true \text{ z } \Gamma, C_1true \vdash Atrue \\ \Gamma \vdash C_1 \rightarrow C_2true \quad \text{wobec reguły } \rightarrow I \text{ z } \Gamma, C_1true \vdash C_2true. \end{array}$$

Przypadek $\frac{\Gamma, Atrue \vdash C' \rightarrow Ctrue, \quad \Gamma, Atrue \vdash C'true}{\Gamma, Atrue \vdash Ctrue} \rightarrow E:$

$\Gamma \vdash C' \rightarrow Ctrue$ wobec założenia indukcyjnego dla
 $\Gamma, Atrue \vdash C' \rightarrow Ctrue$ z $\Gamma \vdash Atrue$

$\Gamma \vdash C'true$ wobec założenia indukcyjnego dla $\Gamma, Atrue \vdash C'true$
z $\Gamma \vdash Atrue$

$\Gamma \vdash Ctrue$ wobec reguły $\rightarrow E$ z $\Gamma \vdash C' \rightarrow Ctrue$ oraz $\Gamma \vdash C'true$.

Tym samym mając dany dowód $\mathcal{D}$ osądu $\Gamma \vdash Atrue$ oraz dowód $\mathcal{E}$ osądu $\Gamma, Atrue \vdash Ctrue$, możemy zawsze zapisać dowód, oznaczany przez $[\mathcal{D}/Atrue]\mathcal{E}$, osądu $\Gamma \vdash Ctrue$ przez podstawienie $\mathcal{D}$ w $\mathcal{E}$.

Lokalna niesprzeczność i zupełność.

Wszystkie podane wcześniej reguły wnioskowania wydają się mieć sens intuicyjnie, ale ich poprawność musi być jeszcze formalnie zweryfikowana. Na przykład, chcielibyśmy spodziewać się, aby reguła eliminacji dla $\wedge$ pozwalała wywnioskować $Atrue$ z $A \wedge Btrue$, a z drugiej strony, zby reguła ta nie pozwalała na wywnioskowanie $Ctrue$ z $A \wedge Btrue$, jeżeli C nie jest w żaden sposób powiązane z A oraz B . Wobec tego musimy zdecydować o wyborze pewnych zasad określających w jaki sposób należy budować system naturalnej dedukcji oraz jakie reguły wnioskowania należy przyjmować, a jakie odrzucać. Zasady, które przyjmiemy, będą gwarantowały, iż nasz system będzie spełniał dwie własności: **logiczną niesprzeczność** oraz **zupełność**.

Reguła wprowadzania kompresuje wiedzę zawartą w jej przesłankach w postaci osądu o prawdzie jako wniosku, podczas gdy reguła eliminacji odczytuje wiedzę skompresowaną w osądzie o prawdzie w jej przesłance celem wydedukowania nowego osądu we wniosku. Zasada lokalnej niesprzeczności orzeka, iż wiedza uzyskana z osądu po zastosowaniu reguły eliminacji jest tylko częścią wiedzy skompresowanej w danym osądzie. Tym samym, jeżeli zasada lokalnej niesprzeczności nie będzie spełniona, reguła eliminacji będzie zbyt silna w takim sensie, że będzie w stanie generować wiedzę niekoniecznie uzasadnioną przez dany osąd; wobec tego lokalna niesprzeczność zapewnia, iż reguła eliminacji nie jest zbyt silna. Zasada lokalnej zupełności orzeka, iż wiedza otrzymana z danego osądu przez regułę eliminacji zawiera przynajmniej tę wiedzę, jaka jest skompresowana w obrębie danego osądu. Tym samym, jeżeli zasada lokalnej spójności nie będzie spełniona, reguła eliminacji będzie zbyt słaba w takim sensie, że będzie niezdolna odczytać całą wiedzę skompresowaną w obrębie danego osądu; wobec tego zasada lokalnej spójności zapewnia, iż reguła eliminacji jest wystarczająco silna. Jeżeli dana reguła eliminacji spełnia

Zasadę lokalnej niesprzeczności weryfikujemy pokazując w jaki sposób można zredukować dowód, w którym reguła wprowadzania pojawia się bezpośrednio przed odpowiadającą jej regułą eliminacji. Jako przykład rozważmy następujący przykład, w którym reguła wprowadzania $\wedge I$ pojawia się bezpośrednio przed odpowiadającą jej regułą eliminacji $\wedge E_L$:

$$\frac{\displaystyle \frac{\mathcal{D} \quad A_{true} \quad \mathcal{E} \quad B_{true}}{A \wedge B_{true}} \wedge I}{A_{true}} \wedge E_L$$

Reguła $\wedge E_L$ nie jest zbyt silna, albowiem to, co dzięki niej potrafimy wydedukować we wniosku, a zatem $Atrue$, jest jednym z dwóch osądów użytych do wydedukowania $A \wedge Btrue$. Tym samym cały dowód redukuje się do prostszego dowodu $\mathcal{D}$:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{D} \\
 Atrue
 \end{array}
 \leftarrow_R
 \frac{
 \begin{array}{c}
 \mathcal{D} \\
 Atrue
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \mathcal{E} \\
 Btrue
 \end{array}
 }{
 \frac{A \wedge Btrue}{Atrue} \wedge E_L
 }
 \wedge I$$

Gdyby reguła $\wedge E_L$ była zbyt silna (gdyby dało się z niej jakoś wywnioskować na przykład $A \rightarrow Btrue$), powyższego dowodu nie dałoby się zredukować.

Jako kolejny przykład, rozważmy następujący dowód, w którym reguła wprowadzania $\rightarrow I$ bezpośrednio poprzedza regułę eliminacji $\rightarrow E$:

$$\begin{array}{c}
 \overline{Atrue}^x \\
 \vdots \\
 Btrue \\
 \hline
 A \rightarrow Btrue \rightarrow I^x
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \mathcal{D} \\
 Atrue
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \hline
 Btrue \rightarrow E
 \end{array}$$

Reguła $\rightarrow E$ nie jest zbyt silna, albowiem cały powyższy dowód daje się zredukować do krótszego dowodu tego samego osądu $Btrue$ podstawiając $\mathcal{D}$ w miejsce hipotezy $\overline{Atrue}^x$ w przesłance reguły $\rightarrow I^x$:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{D} \\
 Atrue \\
 \vdots \\
 Btrue
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \overline{Atrue}^x \\
 \vdots \\
 Btrue
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \\
 \leftarrow_R \\
 \\
 \end{array}
 \frac{
 \frac{
 \overline{Atrue}^x \\
 \vdots \\
 Btrue
 }{
 A \rightarrow Btrue
 }
 \rightarrow I^x
 }{
 Btrue
 }
 \begin{array}{c}
 \mathcal{D} \\
 Atrue
 \end{array}
 \rightarrow E$$

W systemie naturalnej dedukcji opartym na osądach hipotetycznych, reguła podstawiania uzasadnia $\Gamma \vdash B_{true}$ za każdym razem, gdy mamy do dyspozycji dowody $\Gamma \vdash A_{true}$ oraz $\Gamma, A \vdash B_{true}$:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 [\mathcal{E}/A_{true}]\mathcal{D} \\
 \Gamma \vdash B_{true}
 \end{array}
 \Longleftarrow_R \\
 \\
 \begin{array}{c}
 \mathcal{D} \\
 \hline
 \Gamma, A_{true} \vdash B_{true} \\
 \hline
 \Gamma \vdash A \rightarrow B_{true}
 \end{array}
 \rightarrow I
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \mathcal{E} \\
 \Gamma \vdash A_{true}
 \end{array}
 \\
 \hline
 \Gamma \vdash B_{true}
 \end{array}
 \rightarrow E$$

Przypadek $\vee$ jest podobny do przypadku $\rightarrow$ i również stosuje zasadę podstawiania:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{D} \\
 Atrue \\
 \vdots \\
 Ctrue \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{D} & & \\
 \frac{Atrue}{A \vee Btrue} \vee I_L & \begin{array}{c} \overline{Atrue}^x \\ \vdots \\ Ctrue \end{array} & \begin{array}{c} \overline{Btrue}^y \\ \vdots \\ Ctrue \end{array} \\
 \hline
 Ctrue & \vee E^{x,y}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad \Longleftarrow_R$$

natomiast w systemie dedukcji opartym na osądach hipotetycznych:

$$\begin{array}{c}
 [\mathcal{D}/Atrue]\mathcal{E}_L \\
 \Gamma \vdash Ctrue \quad \Longleftarrow_R \\
 \\
 \begin{array}{c}
 \mathcal{D} \\
 \hline
 \Gamma \vdash Atrue
 \end{array} \quad \vee I_L \qquad \begin{array}{c} \mathcal{E}_L \\ \Gamma, A \vdash Ctrue \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mathcal{E}_R \\ \Gamma, B \vdash Ctrue \end{array} \\
 \hline
 \Gamma \vdash Ctrue \quad \vee E
 \end{array}$$

O redukcjach $\Leftarrow_R$ będziemy mówili jako o **redukcjach lokalnych**. Odnotujmy tu, że nie istnieją lokalne redukcje dla $\top$ oraz $\perp$, jako że $\top$ nie ma reguły eliminacji, a $\perp$ nie ma reguły wprowadzania.

Zasadę lokalnej zupełności sprawdzamy pokazując w jaki sposób można rozszerzyć dowód danego osądu do nowego dowodu, w którym reguła wprowadzania bezpośrednio poprzedza jedną lub więcej odpowiadających reguł eliminacji. Jako przykład, rozważmy dowód $\mathcal{D}$ osądu $A \wedge Btrue$. Reguły eliminacji $\wedge E_L$ oraz $\wedge E_R$ nie są zbyt słabe, albowiem sposób, w jaki dedukują swoje wnioski, a mianowicie $Atrue$ oraz $Btrue$, jest wystarczający do odtworzenia innego dowodu osądu $A \wedge Btrue$:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{D} \\
 A \wedge Btrue
 \end{array}
 \leftarrow_E
 \frac{
 \frac{
 \mathcal{D} \quad A \wedge Btrue
 }{Atrue} \wedge E_L \quad
 \frac{
 \mathcal{D} \quad A \wedge Btrue
 }{Btrue} \wedge E_R
 }{A \wedge Btrue} \wedge I$$

Gdyby reguły eliminacji były zbyt słabe (na przykład gdyby nie pozwalały na udowodnienie $Atrue$), dowodu nie dałoby się rozszerzyć.

Jako kolejny przykład rozważmy dowód $\mathcal{D}$ osądu $A \rightarrow Btrue$.
 Możemy odtworzyć inny dowód tego samego osądu po
 zastosowaniu reguły eliminacji $\rightarrow E$ do $\mathcal{D}$, co z kolei implikuje,
 że reguła $\rightarrow E$ nie jest zbyt słaba:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{D} \\
 A \rightarrow Btrue
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \xleftarrow{E}
 \end{array}
 \frac{
 \begin{array}{c}
 \mathcal{D} \\
 A \rightarrow Btrue
 \end{array}
 \quad
 \overline{Atrue}^x
 }{
 \frac{Btrue}{A \rightarrow Btrue} \rightarrow I^x
 }
 \rightarrow E$$

Rozszerzając dowód $\mathcal{D}$ zastosowaliśmy nową etykietę x , która nie była wcześniej wykorzystana w dowodzie $\mathcal{D}$, jako że dowolna niezwolniona hipoteza $\overline{Btrue}^x$ o tej samej etykiecie w $\mathcal{D}$ zostaje zwolniona przez regułę $\rightarrow I^x$, co skutkuje niepoprawnym dowodem, o ile $A \neq B$. Dla systemu naturalnej dedukcji opartego na osądach hipotetycznych osłabiamy dowód $\mathcal{D}$ osądu $\Gamma \vdash A \rightarrow Btrue$ celem otrzymania dowodu osądu $\Gamma, Atrue \vdash A \rightarrow Btrue$ przy odtwarzaniu nowego dowodu osądu $\Gamma \vdash A \rightarrow Btrue$:

$$\begin{array}{c}
\mathcal{D} \\
\Gamma \vdash A \rightarrow Btrue \quad \Leftarrow_E \\
\mathcal{D} \qquad \qquad \qquad \frac{}{\Gamma, Atrue \vdash Atrue} \text{Hyp} \\
\frac{\Gamma, Atrue \vdash A \rightarrow Btrue}{\Gamma, Atrue \vdash Btrue} \rightarrow E \\
\frac{\Gamma, Atrue \vdash Btrue}{\Gamma \vdash A \rightarrow Btrue} \rightarrow I
\end{array}$$

Przypadek $\vee$ wygląda następująco:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{D} \\
 A \vee Btrue \\
 \hline
 \mathcal{D} \quad \frac{A \vee Btrue}{\overline{Atrue}^x} \vee I_L \quad \frac{\overline{Btrue}^y}{A \vee Btrue} \vee I_R \quad \frac{\overline{A \vee Btrue}}{A \vee Btrue} \Leftarrow E \\
 \hline
 A \vee Btrue \quad \vee E^{x,y}
 \end{array}$$

a w systemie naturalnej dedukcji opartym o osady hipotetyczne:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{D} \\
 \Gamma \vdash A \vee Btrue \\
 \\
 \frac{\mathcal{D} \quad \frac{\Gamma \vdash A \vee Btrue \quad \Leftarrow_E}{\Gamma, Atrue \vdash Atrue} \text{Hyp} \quad \frac{\Gamma, Atrue \vdash Atrue}{\Gamma, Atrue \vdash A \vee Btrue} \vee I_L \quad \frac{}{\Gamma, Btrue \vdash Btrue} \text{Hyp} \quad \frac{}{\Gamma, Btrue \vdash A \vee Btrue} \vee I_R}{\Gamma \vdash A \vee Btrue} \vee E
 \end{array}$$

O rozszerzeniach $\Leftarrow_E$ będziemy mówili jako o **rozszerzeniach lokalnych**.

Jakkolwiek nie ma lokalnych redukcji dla $\top$ oraz $\perp$, istnieją lokalne rozszerzenia dla $\top$ i $\perp$. Przypomnijmy, że $\top$ i $\perp$ są "zerowymi" przypadkami koniunkcji i alternatywy, odpowiednio. Tym samym dowód $\mathcal{D}$ osądu $\top true$ rozszerza się do nowego dowodu osądu $\top true$, który używa zero reguł eliminacji i tym samym ignoruje $\mathcal{D}$:

$$\frac{}{\top true} \top I \longleftarrow_E \frac{\mathcal{D}}{\top true}$$

Podobnie dowód $\perp true$ rozszerza się do nowego dowodu $\perp true$, który używa zero reguł wprowadzania:

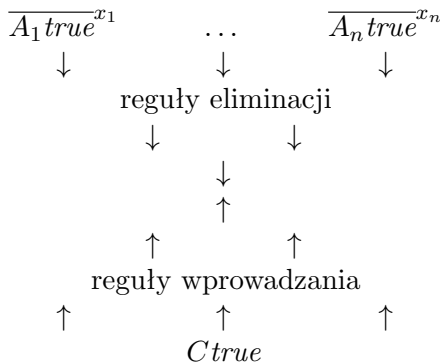
$$\frac{\frac{\perp true}{\perp true} \perp E}{\perp true} \longleftarrow_E \frac{\mathcal{D}}{\perp true}$$

Jako że każdy ze spójników spełnia zasadę lokalnej niesprzeczności i spójności, powiemy, że system naturalnej dedukcji dla logiki zdań jest lokalnie niesprzeczny i spójny. Za każdym razem, gdy rozszerzamy nasz system o nowy spójnik, kwantyfikator itp. musimy każdorazowo sprawdzić, że nowy system dalej jest lokalnie niesprzeczny i spójny, szukając odpowiadających lokalnych redukcji i rozszerzeń.

Dowody normalne.

Zauważyliśmy, że dowody zawierające "objazd", a więc regułę wprowadzania, która bezpośrednio poprzedza odpowiadającą jej regułę eliminacji, może być zamieniony na inny dowód po zastosowaniu lokalnej redukcji. Okazuje się, że dla każdego dowodu osądu *Atrue* istnieje ciąg lokalnych redukcji, który prowadzi do innego dowodu *Atrue* nie zawierającego takich "objazdów" (mowa o twierdzeniu normalizacyjnym). Dowód otrzymany w rezultacie zastosowania takiej procedury nazywamy **dowodem normalnym**. Dowód normalny jest zatem możliwie najbardziej bezpośrednim dowodem, jako że każde zastosowanie "objazdu" może być interpretowane jako przykład rozumowania, które nie jest bezpośrednie. Ponadto dowód taki jest w pewnym sensie (niezależnym od wielkości jego syntaktycznej reprezentacji) minimalny, nie redukuje się bowiem do innego dowodu.

Jako że dowód normalny nie zawiera "objazdu", można go zapisać w następującej postaci, gdzie zapisywane od góry do dołu reguły eliminacji spotykają się w środku z zapisywanymi od dołu do góry regułami wprowadzania:



Tym samym struktura dowodu normalnego odpowiada naszej intuicji budowania dowodu poprzez kolejne zastosowania reguł wprowadzania od dołu do góry, dodania nowych hipotez, a następnie kolejnego zastosowania reguł eliminacji od góry do dołu, startując od hipotez. Oto przykład dowodu normalnego osądu $(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)$ *true*:

$$\frac{\frac{\overline{A \wedge Btrue}^x}{Btrue} \wedge E_R \quad \frac{\overline{A \wedge Btrue}^x}{Atrue} \wedge E_L}{\frac{B \wedge Atrue}{(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)true} \rightarrow I^x} \wedge I$$

Dla kontrastu następujący dowód $(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)$ *true* nie jest normalny, zawiera bowiem "objazdy":

$$\frac{\frac{\frac{\overline{A \wedge Btrue}^x}{Atrue} \wedge E_L \quad \frac{\frac{\overline{A \wedge Btrue}^x}{Btrue} \wedge E_R}{A \wedge Btrue} \wedge I \text{ ("objazd")}}{\frac{A \wedge Btrue}{Btrue} \wedge E_R} \quad \frac{\frac{\overline{A \wedge Btrue}^x}{Atrue} \wedge E_L \quad \frac{\overline{A \wedge Btrue}^x}{Atrue} \wedge E_R}{\frac{A \wedge Btrue}{Atrue} \wedge I} \quad \frac{B \wedge Atrue}{(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)true} \rightarrow I^x$$

Dowody normalne są trudnym do przecenienia narzędziem w studiowaniu logiki z uwagi na ich własności niesprzeczności i zupełności: osąd *Atrue* zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dowód normalny *Atrue*. Własność niesprzeczności jest tu spełniona trywialnie, jako że dowód normalny jest tylko dowodem w pewnej szczególnej postaci. Własność zupełności (orzekająca, iż każdy dowód ma odpowiadający mu dowód normalny) pociąga za sobą dwie ważne konsekwencje. Po pierwsze, aby udowodnić *Atrue*, wystarczy znaleźć dowód normalny. Dowodząc *Atrue* bezpiecznie jest, na przykład, pominąć dowody następującej postaci, które nie mogą być dowodami normalnymi:

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ B \rightarrow Atrue \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ Btrue \end{array}}{Atrue} \rightarrow E$$

Innymi słowy, wystarczy, że skupimy się na możliwie najbardziej bezpośrednim dowodzie zamiast na dowodzie mniej bezpośrednim, który, na przykład tak jak powyższy dowód, wprowadza dodatkowe zdanie B . Po drugie, chcąc odrzucić osąd A_{true} , wystarczy spróbować zbudować jego dowód normalny (próbując na zmianę stosować od dołu do góry reguły wprowadzania i od góry do dołu reguły eliminacji) i pokazać, że proces konstrukcji zaczyna się lub nie może się zakończyć.

Zadanie

Podać nieformalne uzasadnienie dlaczego osąd $\neg\neg A \rightarrow A$ true nie jest dowodliwy.