

Logiczna równoważność.

Powiemy, że zdanie A jest logicznie równoważne zdaniu B , co oznaczamy przez $A \equiv B$, jeżeli $Atrue$ pociąga $Btrue$ i na odwrót.

Innymi słowy logiczna równoważność jest konwencją notacyjną następującej postaci:

$$A \equiv B \quad = \quad (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)true$$

Jeżeli A i B są logicznie równoważne, to każdorazowe pojawienie się zdania A w innym zdaniu może zostać podmienione na B i vice versa.

Tym samym logiczna równoważność pozwala nam na uproszczenie dowodów zawierających zdania logicznie równoważne mniej skomplikowanym zdaniom.

Na przykład dowód

$$\neg\neg\neg A \rightarrow (\neg\neg\neg B \rightarrow \neg(A \vee B)) \text{true}$$

staje się prostszy (czy wręcz oczywisty), jeżeli zamienimy $\neg\neg\neg A \rightarrow (\neg\neg\neg B \rightarrow \neg(A \vee B))$ na $(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B)$ wykorzystując logiczne równoważności $\neg\neg\neg A \equiv \neg A$ oraz $A \rightarrow (B \rightarrow C) \equiv (A \wedge B) \rightarrow C$.

Poniżej podajemy listę wybranych logicznych równoważności w rachunku zdań, którą podzieliliśmy na trzy grupy:

Przemienność i idempotencja.

Koniunkcja i alternatywa są przemienne i idempotentne.

Implikacja $A \rightarrow A$ jest logicznie bezwartościowa i redukuje się do $\top$:

$$(C1) \quad A \wedge B \equiv B \wedge A$$

$$(C2) \quad A \vee B \equiv B \vee A$$

$$(C3) \quad A \rightarrow B \not\equiv B \rightarrow A$$

$$(I1) \quad A \wedge A \equiv A$$

$$(I2) \quad A \vee A \equiv A$$

$$(I3) \quad A \rightarrow A \equiv \top$$

Prawda i fałsz.

Każda z poniższych równoważności odnosi się do zdań postaci $\top \phi A$, $\perp \phi A$, $A \rightarrow \top$ lub $\perp \rightarrow A$, gdzie ϕ oznacza jeden ze spójników $\wedge$, $\vee$ lub $\rightarrow$:

$$(M1) \quad \top \wedge A \equiv A$$

$$(M2) \quad \top \vee A \equiv \top$$

$$(M3) \quad \top \rightarrow A \equiv A$$

$$(M4) \quad \perp \wedge A \equiv \perp$$

$$(M5) \quad \perp \vee A \equiv A$$

$$(M6) \quad \perp \rightarrow A \equiv \top$$

$$(M7) \quad A \rightarrow \top \equiv \top$$

$$(M8) \quad A \rightarrow \perp \equiv \neg A$$

Związki pomiędzy spójnikami.

Każda z poniższych równoważności odnosi się do zdań postaci $A\phi(B\phi C)$ lub $(A\phi B) \rightarrow C$, gdzie ϕ oznacza jeden ze spójników $\wedge, \vee$ lub $\rightarrow$:

$$(L1) \quad A \wedge (B \wedge C) \equiv A \wedge (B \wedge C) \text{ (łączność } \wedge)$$

$$(L2) \quad A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \text{ (rozdzielność } \wedge \text{ względem } \vee)$$

$$(L3) \quad A \wedge (B \rightarrow C) \equiv? \text{ (brak związku)}$$

$$(L4) \quad A \vee (B \vee C) \equiv A \vee (B \vee C) \text{ (łączność } \vee)$$

$$(L5) \quad A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C) \text{ (rozdzielność } \vee \text{ względem } \wedge)$$

$$(L6) \quad A \vee (B \rightarrow C) \equiv? \text{ (brak związku)}$$

$$(L7) \quad A \rightarrow (B \wedge C) \equiv (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \text{ (rozdzielność } \rightarrow \text{ względem } \wedge)$$

$$(L8) \quad A \rightarrow (B \rightarrow C) \equiv? \text{ (brak związku)}$$

$$(L9) \quad A \rightarrow (B \rightarrow C) \equiv (A \wedge B) \rightarrow C$$

$$(L10) \quad (A \vee B) \rightarrow C \equiv (A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)$$

$$(L11) \quad (A \rightarrow B) \rightarrow C \equiv? \text{ (brak związku)}$$

Zadanie

Udowodnić równoważności (L2), (L4), (L7), (L9) oraz (L10).

Osądy hipotetyczne.

Podane przez nas wcześniej reguły wnioskowania definiujące system naturalnej dedukcji dla rachunku zdań nie nadają się zbyt do pisania dowodów hipotetycznych.

Dzieje się tak ponieważ żadna z podanych reguł nie dostarcza wygodnej metody do śledzenia zasięgu każdej z hipotez, co zasadniczo uniemożliwia ustrzeżenie się przed utratą kontroli nad zasięgiem obowiązywania hipotez.

Na przykład następujący dowód hipotetyczny zawiera błędne użycie hipotezy $\overline{Atrue}^x$ poza jej zasięgiem obowiązywania:

$$\frac{\frac{\overline{Atrue}^x}{A \rightarrow Atrue} \rightarrow I^x \quad \overline{Atrue}^x \text{ (błędne użycie)}}{(A \rightarrow A) \wedge Atrue} \wedge I$$

Za każdym razem, gdy wprowadzamy nową hipotezę, możemy wyobrazić sobie, że rysujemy kontur oznaczający zasięg jej obowiązywania, tak jak poniżej:

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} \overline{Atrue}^x \\ \vdots \\ Btrue \end{array}}^x}{A \rightarrow Btrue} \rightarrow I^x$$

$$\begin{array}{c}
 A \vee B \text{ true} \\
 \\
 \hline
 \begin{array}{|c|} \hline \overline{A \text{ true}}^x \\ \vdots \\ C \text{ true} \\ \hline \end{array}^x
 \quad
 \begin{array}{|c|} \hline \overline{B \text{ true}}^y \\ \vdots \\ C \text{ true} \\ \hline \end{array}^y \\
 \\
 C \text{ true} \qquad \vee E^{x,y}
 \end{array}$$

W powyższych przykładach zakres obowiązywania hipotezy $\overline{Atrue}^x$ jest ograniczony konturem oznaczonym przez x .

Zauważmy, że jeden kontur może znajdować się wewnątrz innego konturu, tak jak w poniższym przykładzie:

$$\frac{\boxed{\frac{\boxed{\overline{Btrue}^y}{A \wedge Btrue} \wedge I} \rightarrow I^x}{\overline{Atrue}^x} \rightarrow I^x$$

Hipoteza $\overline{Atrue}^x$ może być użyta wewnątrz wewnętrznego konturu oznaczonego przez y , dzięki czemu potrafimy udowodnić $A \wedge Btrue$ z wykorzystaniem reguły $\wedge I$, ale hipoteza $\overline{Btrue}^y$ nie może być użyta poza wewnętrznym konturem.

Osądy hipotetyczne dostarczają wygodnego sposobu na śledzenie zasięgu każdej z hipotez w dowodzie hipotetycznym. Hipotetyczny osąd $J_1, \dots, J_n \vdash J$ odzwierciedla hipotetyczny dowód osądu J na podstawie ciągu hipotez $\overline{J_1}, \dots, \overline{J_n}$:

$$J_1, \dots, J_n \vdash J \Leftrightarrow \left. \begin{array}{ccc} \overline{J_1} & \dots & \overline{J_n} \\ & \vdots & \\ & J & \end{array} \right\} \text{reguły wnioskowania}$$

Tym samym możemy odczytywać $J_1, \dots, J_n \vdash J$ jako "jeśli zachodzą osądy $J_1, \dots, J_n$, to zachodzi osąd J ".

Gdy zachodzi osąd hipotetyczny $J_1, \dots, J_n \vdash J$ mówimy, że J jest konsekwencją $J_1, \dots, J_n$.

Tym samym $\vdash$ nazywana jest **relacją konsekwencji**.

O osądach $J_1, \dots, J_n$ będziemy myśleli jak o **przesłankach**, zaś o osądzie J jak o **wniosku**.

Zbiór przesłanek często będziemy zapisywali krótko jako Γ , skracając tym samym zapis osądu hipotetycznego do $\Gamma \vdash J$.

Rozwijając dalej system naturalnej dedukcji dla rachunku zdań będziemy używami hipotetycznych osądów postaci

$A_1 true, \dots, A_n true \vdash A true$, gdzie zarówno przesłanki jak i wniosek są zawsze osądami o prawdzie.

Zanim podamy reguły wnioskowania dla tak rozumianego rachunku zdań, prześledźmy najpierw wybrane własności osądów hipotetycznych odnoszących się do przesłanek i wniosków dowolnej postaci.

Podana definicja osądu hipotetycznego w trywialny sposób zapewnia prawdziwość następujących dwóch zasad **zwrotności** oraz **reguły podstawiania**:

- ▶ (zwrotność) $\Gamma, J, \Gamma' \vdash J$
- ▶ (reguła podstawiania) jeżeli $\Gamma \vdash J$ oraz $\Gamma, J \vdash J'$, to wówczas $\Gamma \vdash J'$.

Zasada zwrotności orzeka, że możemy wykorzystać hipotezę $\overline{J}$, aby wywnioskować J .

Reguła podstawiania powiada z kolei, iż jeśli potrafimy udowodnić osąd J na podstawie pewnego ciągu hipotez, to możemy użyć J jako nowej hipotezy za każdym razem, gdy wykorzystujemy ten sam zbiór hipotez. Innymi słowy, możemy wykorzystać J jako lemat w dowodzie osądu $\Gamma \vdash J'$.

Aby zilustrować działanie reguły podstawiania, załóżmy $\Gamma \vdash J$ oraz $\Gamma, J \vdash J'$, co oznacza istnienie dwóch dowodów hipotetycznych $\mathcal{D}$ i $\mathcal{E}$ jak poniżej:

$$\Gamma \vdash J \Leftrightarrow \left. \begin{array}{c} \bar{\Gamma} \\ \vdots \\ J \end{array} \right\} \mathcal{D} \qquad \Gamma, J \vdash J' \Leftrightarrow \left. \begin{array}{ccc} \bar{\Gamma} & \dots & \bar{J} \\ & \vdots & \\ & J' & \end{array} \right\} \mathcal{E}$$

Symbol $\bar{\Gamma}$ oznacza tu, jak nietrudno się domyślić, $\{\bar{J} : J \in \Gamma\}$.

Teraz możemy odnaleźć każde wystąpienie hipotezy $\overline{J}$ w dowodzie $\mathcal{E}$ i **podstawić** za nią $\mathcal{D}$, otrzymując tym samym następujący dowód hipotetyczny:

$$\begin{array}{c} \overline{\Gamma} \quad \dots \quad \left. \begin{array}{c} \overline{\Gamma} \\ \vdash \\ J \end{array} \right\} \mathcal{D} \\ \vdots \\ J' \end{array}$$

Jako że ta sama hipoteza (na przykład jedna z hipotez występujących w $\overline{\Gamma}$ może być użyta dowolną liczbę razy, powyższy osąd hipotetyczny sankcjonuje osąd hipotetyczny $\Gamma \vdash J'$, czyli to, co przez regułę podstawiania otrzymujemy z osądów $\Gamma \vdash J$ oraz $\Gamma, J \vdash J'$.

W naszej definicji osądu hipotetycznego pojawiają się dwa istotne założenia: po pierwsze, kolejność pojawiania się hipotez nie ma znaczenia i po drugie, dana hipoteza może być użyta zero lub więcej razy w dowodzie hipotetycznym.

Te założenia formalnie zapisujemy jako **własności strukturalne** osądów hipotetycznych:

- ▶ (wymiana) jeżeli $\Gamma, J_i, J_{i+1}, \Gamma' \vdash J$, to wówczas $\Gamma, J_{i+1}, J_i, \Gamma' \vdash J$
- ▶ (osłabienie) jeżeli $\Gamma, \Gamma' \vdash J$, to wówczas $\Gamma, J', \Gamma' \vdash J$ dla dowolnego osądu J'
- ▶ (ściągnięcie) jeżeli $\Gamma, J_i, J_i \Gamma' \vdash J$, to wówczas $\Gamma, J_i, \Gamma' \vdash J$

Zasada wymiany orzeka, że możemy zignorować kolejność występowania przesłanek w osądzie hipotetycznym.

Zasada osłabienia powiada, iż może dodać nową przesłankę, a następnie jej nie użyć, tym samym "osłabiając" to, co dowodzimy.

Na koniec zasada ściągania mówi, że możemy "ściągnąć" dwie kopie tej samej przesłanki do jednego egzemplarza. Odnotujmy tu, iż wobec zasady osłabiania, hipoteza może być użyta zero razy, zaś wobec zasady ściągania – może być użyta więcej niż jeden raz.

Oto kilka dalszych uwag wartych odnotowania:

- ▶ Osądy hipotetyczne są w zasadzie tylko wygodnym, a nie nowym, sposobem reprezentowania dowodów hipotetycznych. Innymi słowy relacja $\vdash$ jest tylko narzędziem syntaktycznym służącym prezentowaniu hipotez i wniosków osądu hipotetycznego i jednocześnie ukrywaniu ich wewnętrznej struktury i tym samym nie wprowadzającym nowego pojęcia semantycznego.

- ▶ Ogólnie dopuszczamy możliwość skorzystania z więcej niż jednego dowodu hipotetycznego celem dowodu osądu hipotetycznego, jako że osądy hipotetyczne odnoszą się wyłącznie do hipotez i wniosków.

- ▶ Osąd hipotetyczny sam w sobie jest przykładem osądu jako takiego i tym samym może być użyty jako przesłanka bądź jako wniosek w innym osądzie hipotetycznym, jakkolwiek nie będziemy używać w ten sposób osądów hipotetycznych w dalszym toku tego wykładu. W istocie $J_1, \dots, J_n \vdash J$ można rozważać jako skrót pewnego scentrowanego osądu $J_1 \vdash (J_2 \vdash \dots, J_n \vdash J) \dots$, gdzie każda z przesłanek J_i lub wniosek J może być innym osądem hipotetycznym.

- ▶ Jakkolwiek dość blisko związane, hipotetyczny osąd $J_1, \dots, J_n \vdash J$ i reguła $\frac{J_1, \dots, J_n}{J} R$ to nie to samo i nie można ich porównywać celem odnalezienia potencjalnej równoważności.

Powód jest prosty: hipotetyczny osąd to, jak sama nazwa wskazuje, osąd, zaś R to reguła wnioskowania. Istnienie dowodu $J_1, \dots, J_n \vdash J$ oznacza tylko, że R jest regułą wyprowadzalną.

Na odwrót, jeśli dostępna jest reguła wnioskowania R , to zawsze potrafimy uzasadnić $J_1, \dots, J_n \vdash J$ za pomocą następującego dowodu hipotetycznego:

$$\frac{\overline{J_1} \dots \overline{J_n}}{J} R$$

Odnotujmy wszakże, iż powyższy dowód hipotetyczny może nie być jedynym sposobem udowodnienia

$J_1, \dots, J_n \vdash J$, jeżeli tylko potrafimy wskazać inny dowód

hipotetyczny $\vdash$ bez użycia reguły R .

- ▶ Osąd hipotetyczy $\vdash J$ bez przesłanek **nie jest** równoważny swojemu wnioskowi J . O ile osąd informuje nas, że J zachodzi bezwarunkowo, o tyle wniosek J sam funkcjonuje w oderwaniu od tego, czy założyliśmy jakiegokolwiek hipotezy i w szczególności sam może być hipotezą w osądzie hipotetycznym.

Na przykład, wobec założenia $J \vdash J'$ możemy pokazać, że $\vdash J$ implikuje $\vdash J'$ stosując regułę podstawiania.

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, ponieważ dowód $\vdash J'$ wcale nie musi być rozszerzeniem dowodu $\vdash J$.

- ▶ Ważną konsekwencją własności strukturalnych jest to, że dwa osądy hipotetyczne w każdej z reguł, a mianowicie $\Gamma \vdash J$ z części "jeśli" reguły oraz $\Gamma' \vdash J$ z części "to wówczas", reprezentują dowody hipotetyczne nie tylko tej samej wielkości (mierzonej liczbą zastosowań reguł wnioskowania), ale również o dokładnie takiej samej strukturze.

W rezultacie za każdym razem, gdy stosujemy indukcję strukturalną (lub indukcję reguł) do $\Gamma \vdash J$, możemy zamiast tego zastosować indukcję strukturalną do $\Gamma' \vdash J$.

System naturalnej dedukcji dla rachunku zdań zapisany z użyciem osądów hipotetycznych będzie wyglądał następująco:

$$\begin{array}{l} \blacktriangleright \frac{Atrue \in \Gamma}{\Gamma \vdash Atrue} \text{Hyp} \\ \blacktriangleright \frac{\Gamma, Atrue \vdash Btrue}{\Gamma \vdash A \rightarrow Btrue} \rightarrow I \\ \blacktriangleright \frac{\Gamma \vdash A \rightarrow Btrue \quad \Gamma \vdash Atrue}{\Gamma \vdash Btrue} \rightarrow E \end{array}$$

$$\blacktriangleright \frac{\Gamma \vdash Atrue \quad \Gamma \vdash Btrue}{\Gamma \vdash A \wedge Btrue} \wedge I$$

$$\blacktriangleright \frac{\Gamma \vdash A \wedge Btrue}{\Gamma \vdash Atrue} \wedge E_L$$

$$\blacktriangleright \frac{\Gamma \vdash A \wedge Btrue}{\Gamma \vdash Btrue} \wedge E_R$$

$$\blacktriangleright \frac{\Gamma \vdash Atrue}{\Gamma \vdash A \vee Btrue} \vee I_L$$

$$\blacktriangleright \frac{\Gamma \vdash Btrue}{\Gamma \vdash A \vee Btrue} \vee I_R$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee Btrue \quad \Gamma, Atrue \vdash Ctrue \quad \Gamma, Btrue \vdash Ctrue}{\Gamma \vdash Ctrue} \vee E$$

$$\blacktriangleright \frac{}{\Gamma \vdash \top true} \top I$$

$$\blacktriangleright \frac{\Gamma \vdash \perp true}{\Gamma \vdash Ctrue} \perp E$$

$$\blacktriangleright \frac{\Gamma, Atrue \vdash \perp true}{\Gamma \vdash \neg Atrue} \neg I$$

$$\blacktriangleright \frac{\Gamma \vdash \neg Atrue \quad \Gamma \vdash Atrue}{\Gamma \vdash \perp true} \neg E$$