

Dowody indukcyjne.

Dotychczas zobaczyliśmy w jaki sposób można specyfikować definicje indukcyjne kategorii syntaktycznych lub osądów, czy też w zasadzie indukcyjne systemy kategorii syntaktycznych lub osądów. Okazuje się jednak, że definicje indukcyjne jako takie mają ograniczone zastosowanie o ile nie pokażemy, że zdefiniowany przez nie system ma pożądane przez nas własności. Innymi słowy, nie możemy indukcyjnie zdefiniować danego systemu a następnie niezwłocznie zacząć go używać bez wcześniejszego sprawdzenia pewnych jego własności. Na przykład intuicyjnie czujemy, że każdy ciąg w kategorii syntaktycznej `mparen` ma taką samą liczbę nawiasów lewych jak i prawych, aczkolwiek definicja tej kategorii nie dowodzi automatycznie takiej własności. Tym samym musimy jakoś formalnie udowodnić, że kategoria `mparen` opisuje ciągi odpowiadających sobie lewych i prawych nawiasów zanim zaczniemy ją używać.

Istnieją także inne powody, dla których musimy być w stanie przeprowadzać formalne dowody własności systemów indukcyjnych. Na przykład systemy indukcyjne często są tak rozbudowane i skomplikowane, że ich niesprzeczność wcale nie jest oczywista. W takich wypadkach na ogół próbujemy udowodnić pewną własność, o której spodziewamy się, że zachodzi w danym systemie. Wówczas każda usterka w definicji, która psuje żądaną własność, prędzej czy później ujawni się w dowodzie. Na przykład wyrażenie w języku funkcyjnym powinno ewaluować się do wartości o zadanym typie, ale odpowiedzialna za to własność języka funkcyjnego (zwana **własnością zachowywania typu**) wcale nie jest oczywista. Chcąc udowodnić zachowywanie typów musimy albo zlokalizować usterki w definicjach, albo częściowo dowieść niesprzeczności systemu. Tym samym dowodzenie własności systemów indukcyjnych staje się najbardziej efektywną pomocą w poprawianiu błędów w definicjach.

Na początek poznamy zasadę zwaną **indukcją strukturalną** służącą dowodzeniu własności systemów indukcyjnych kategorii syntaktycznych. Następnie zajmiemy się studiowaniem zasady zwanej **indukcją reguł** służącą dowodzeniu indukcyjnych systemów osądów. Jako że indukcyjny system kategorii syntaktycznej jest w istocie uproszczonym przedstawieniem odpowiadającego mu indukcyjnego systemu osądów, indukcja strukturalna to w rzeczywistości specjalny przypadek indukcji reguł. Niezależnie od tego indukcja strukturalna zasługuje na osobne potraktowanie ze względu na rolę jaką kategorie syntaktyczne grają w studiowaniu języków programowania.

Indukcja strukturalna

Zasada indukcji strukturalnej orzeka, iż własność kategorii syntaktycznej może być udowodniona indukcyjnie poprzez analizę struktury jej definicji: dla każdego przypadku bazowego pokazujemy, że własność zachodzi bez żadnych dodatkowych założeń, a dla każdego przypadku w kroku indukcyjnym zakładamy, że własność zachodzi dla każdego mniejszego elementu kategorii i następnie pokazujemy, że zachodzi dla całego przypadku.

Kilka przykładów powinno wyjaśnić o co chodzi. Rozważmy kategorię syntaktyczną liczb naturalnych. Chcemy pokazać, że $P(n)$ zachodzi dla dowolnej liczby naturalnej n . Przykładami $P(n)$ mogą być:

- ▶ n ma następnik,
- ▶ n jest równe 0 lub n ma poprzednik n' ,
- ▶ n jest iloczynem liczb pierwszych (zakładamy tu, że definicje liczby pierwszej i iloczynu są dane).

Przez indukcję strukturalną dowodzimy następujących dwóch stwierdzeń:

- ▶ $P(0)$ zachodzi,
- ▶ jeżeli $P(n)$ zachodzi, to zachodzi również $P(S\ n)$.

Pierwsze stwierdzenie dotyczy przypadku bazowego, gdy 0 nie zawiera elementu mniejszego od siebie, pokazujemy więc, że $P(0)$ zachodzi bez żadnych założeń. Drugie stwierdzenie dotyczy kroku indukcyjnego, w którym $S\ n$ zawiera mniejszy element n , przyjmujemy więc, jako **założenie indukcyjne**, że zachodzi $P(n)$, a następnie dowodzimy, iż zachodzi $P(S\ n)$. Taka indukcja strukturalna zasadniczo niczym nie różni się od znanej ze szkoły średniej zasady indukcji matematycznej.

Jako kolejny przykład rozważmy kategorię syntaktyczną drzewek binarnych `tree`. Aby udowodnić, że $P(t)$ zachodzi dla każdego regularnego drzewka binarnego t , musimy udowodnić następujące stwierdzenia:

- ▶ $P(\text{leaf } n)$ zachodzi,
- ▶ jeżeli $P(t_1)$ i $P(t_2)$ zachodzą jako założenia indukcyjne, to zachodzi również $P(\text{node } (t_1, n, t_2))$.

Taka indukcja strukturalna bywa czasami nazywana **indukcją po drzewach**.

Jako przykład dowodu indukcyjnego przez indukcję strukturalną pokażemy, że każdy ciąg nawiasów z kategorii **mparen** ma taką samą liczbę nawiasów lewych jak i prawych. Zdefiniujmy na początek dwie funkcje pomocnicze *left* i *right* które będą zliczały liczbę lewych i prawych nawiasów, odpowiednio. Dla poprawienia czytelności zamiast *left*(*s*) i *right*(*s*) będziemy pisali *left*[*s*] i *right*[*s*]. Tym samym mamy:

$$\begin{aligned} \textit{left}[\epsilon] &= 0 \\ \textit{left}[(s)] &= 1 + \textit{left}[s] \\ \textit{left}[s_1 \ s_2] &= \textit{left}[s_1] + \textit{left}[s_2] \\ \textit{right}[\epsilon] &= 0 \\ \textit{right}[(s)] &= 1 + \textit{right}[s] \\ \textit{right}[s_1 \ s_2] &= \textit{right}[s_1] + \textit{right}[s_2]. \end{aligned}$$

Teraz możemy zinterpretować $P(s)$ jako “ $\textit{left}[s] = \textit{right}[s]$ ”. Chcemy zatem pokazać, że jeśli *s* jest elementem **mparen**, co zapisujemy jako $s \in \text{mparen}$, to wówczas zachodzi $P(s)$.

Twierdzenie

Jeśli $s \in \text{mparen}$, to $\text{left}[s] = \text{right}[s]$.

W dowodzie każda linijka odpowiada jednemu krokowi, przy czym stosujemy następującą konwencję notacyjną:

konkluzja

uzasadnienie

Akurat taki format zapisu sprawia, że dowód jest łatwy w czytaniu, gdyż zawsze na pierwszym miejscu widzimy konkluzję poprzedniego kroku, a nie jej uzasadnienie.

Dowód.

Przypadek $s = \epsilon$:

$$\mathit{left}[\epsilon] = 0 = \mathit{right}[\epsilon]$$

Przypadek $s = (s')$:

$$\mathit{left}[s'] = \mathit{right}[s'] \quad \text{wobec założenia indukcyjnego o } s'$$

$$\mathit{left}[s] = 1 + \mathit{left}[s'] = 1 + \mathit{right}[s'] = \mathit{right}[s] \quad \text{wobec}$$

$$\mathit{left}[s'] = \mathit{right}[s']$$

Przypadek $s = s_1 \ s_2$:

$$\mathit{left}[s_1] = \mathit{right}[s_1] \quad \text{wobec założenia indukcyjnego o } s_1$$

$$\mathit{left}[s_2] = \mathit{right}[s_2] \quad \text{wobec założenia indukcyjnego o } s_2$$

$$\mathit{left}[s_1 \ s_2] = \mathit{left}[s_1] + \mathit{left}[s_2] = \mathit{right}[s_1] + \mathit{right}[s_2] =$$

$$\mathit{right}[s_1 \ s_2]$$

$$\text{wobec } \mathit{left}[s_1] = \mathit{right}[s_1] \text{ oraz } \mathit{left}[s_2] = \mathit{right}[s_2]$$



W dowodach takich jak powyższy często mówimy o dowodzie "przez indukcję ze względu na strukturę s " zamiast "przez indukcję strukturalną na s ".

Inkdukcja reguł.

Zasada indukcji reguł jest podobna do zasady indukcji strukturalnej z tym zastrzeżeniem, że stosuje się ją do drzew dowodowych raczej niż do definicji kategorii syntaktycznych. Rozważmy mianowicie definicję indukcyjną osądu J z następującymi regułami wnioskowania:

$$\frac{}{J_b} R_{\text{base}} \qquad \frac{J_1 \quad J_2 \quad \dots \quad J_n}{J_i} R_{\text{ind}}$$

Chcemy pokazać, że gdy tylko J zachodzi, inny osąd $P(J)$ również zachodzi, przy czym $P(J)$ jest nową formą osądu parametryzowaną przez J . Na przykład jeśli w roli J weźmiemy " n nat", to wówczas jako $P(J)$ możemy wziąć "albo n par albo n npar". Tym samym dowodzić będziemy następujących stwierdzeń:

- ▶ $P(J_b)$ zachodzi,
- ▶ jeżeli $P(J_1), P(J_2), \dots, P(J_n)$ zachodzą, to zachodzi również $P(J_i)$.

Wobec pierwszego stwierdzenia, następująca reguła wnioskowania ma sens, jako że zawsze jesteśmy w stanie dowieść $P(J_b)$:

$$\frac{}{P(J_b)} R'_{\text{base}}$$

Następująca reguła wnioskowania również będzie miała sens z racji drugiego stwierdzenia: jeżeli zachodzą $P(J_1), P(J_2), \dots, P(J_n)$, to $P(J_i)$ również zachodzi:

$$\frac{P(J_1) \quad P(J_2) \quad \dots \quad P(J_n)}{P(J_i)} R'_{\text{ind}}$$

Teraz dla każdego drzewa dowodowego dla osądu J wykorzystującego reguły R_{base} oraz R_{ind} możemy udowodnić $P(J)$ stosując reguły R'_{base} oraz R'_{ind} :

$$\begin{array}{ccc} \overline{J_b} R_{\text{base}} & \Rightarrow & \overline{P(J_b)} R'_{\text{base}} \\ \\ \begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & & \vdots \\ J_1 & J_2 & \dots & J_n \end{array} R_{\text{ind}} & \Rightarrow & \frac{\begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & & \vdots \\ P(J_1) & P(J_2) & \dots & P(J_n) \end{array}}{P(J_i)} R'_{\text{ind}} \end{array}$$

Innymi słowy, J zawsze pociąga $P(J)$. Uogólnienie powyższej strategii nazywamy zasadą indukcji reguł.

Jako trywialny przykład udowodnimy, że $n \text{ nat}$ pociąga $n \text{ par}$ lub $n \text{ npar}$. Niech $P(n \text{ nat})$ oznacza “albo $n \text{ par}$ albo $n \text{ npar}$ ” i zastosujemy zasadę indukcji reguł. Reguły *Zero* i *Succ* wymuszają konieczność dowodu następujących dwóch stwierdzeń:

- ▶ $P(0 \text{ nat})$ zachodzi. Innymi słowy, w przypadku gdy reguła *Zero* jest użyta do dowodu $n \text{ nat}$, otrzymujemy $n = 0$ i tym samym dowodzimy $P(0 \text{ nat})$.
- ▶ Jeżeli $P(n' \text{ nat})$ zachodzi, to zachodzi $P(S \ n' \text{ nat})$. Innymi słowy, w przypadku gdy reguła *Succ* jest użyta do dowodu $n \text{ nat}$, otrzymujemy $n = S \ n'$ i tym samym dowodzimy $P(S \ n' \text{ nat})$ wykorzystując założenie indukcyjne $P(n' \text{ nat})$.

Wobec definicji $P(J)$, powyższe dwa stwierdzenia są równoważne następującym:

- ▶ zachodzi 0 par lub 0 npar,
- ▶ jeżeli zachodzi n' par lub n' npar, to zachodzi S n' par lub S n' npar.

Formalny dowód indukcyjny będzie wyglądał następująco:

Twierdzenie

Jeżeli $n \in \mathbb{N}$, to wówczas n par lub n npar.

Podkreślmy tutaj, że w dowodzie będziemy stosować zasadę indukcji reguł w odniesieniu do osądu n **nat**, a nie do liczby naturalnej n . Innymi słowy, będziemy analizowali strukturę dowodu n **nat**, nie zaś strukturę liczby n . Analiza struktury liczby n spowodowałaby, że dowód zdegenerowałby się do przykładu indukcji strukturalnej!

Dowód.

Przypadek $\frac{0}{\text{nat}} \text{Zero}$ (gdzie n akurat równe jest 0).

(W tym przypadku osąd $n \text{ nat}$ jest dowodzony z wykorzystaniem reguły *Zero*. Nie jest to to samo co przypadek, gdy n jest równe 0, jako że nie odwołujemy się do struktury n . Nie stosujemy tu też założenia indukcyjnego.)

0 par wobec reguły *ZeroE*

Przypadek $\frac{n' \text{ nat}}{S \ n' \ \text{nat}} \text{Succ}$ (gdzie n akurat równe jest $S \ n'$).

(W tym przypadku osąd $n \text{ nat}$ jest dowodzony z wykorzystaniem reguły *Zero*.)

n' par lub n' npar wobec założenia indukcyjnego
 $S \ n'$ par lub $S \ n'$ npar wobec reguły *SuccO* lub *SuccE*. □

Indukcja reguł może być także użyta do równoczesnego dowodu dwóch lub więcej osądów. Jako przykład udowodnijmy, że liczba n w osądzie n **par** odpowiada liczbie parzystej, zaś n w osądzie n **npar** odpowiada liczbie nieparzystej. Użyjemy reguł *ZeroE*, *SuccE* i *SuccO* razem z następującymi regułami odnoszącymi się do osądu n **double** n' :

$$\frac{}{0 \text{ double } 0} Dzero \qquad \text{fracn double } n' S \ n \text{ double } S \ S \ n' Dsucc$$

Intuicyjnie osąd n **double** n' oznacza, że n' jest podwojeniem n , a więc $n' = 2 \times n$. Własności liczb parzystych i nieparzystych, które będziemy chcieli dowieść, zawarte są w następującym twierdzeniu:

Twierdzenie

Jeżeli n par, to wówczas istnieje n' takie, że n' double n .

Jeżeli n npar, to wówczas istnieją n' i n'' takie, że n' double n'' oraz $\mathbb{S} n'' = n$.

Dowód twierdzenia będzie przebiegał podobnie jak poprzednie dowody z wykorzystaniem indukcji reguł z tą różnicą, że teraz $P(J)$ będzie rozróżniało dwa przypadki, a mianowicie $J = n$ par i $J = n$ npar:

- ▶ $P(n \text{ par})$ oznacza “istnieje n' takie, że n' double n ,”
- ▶ $P(n \text{ npar})$ oznacza “istnieją n' oraz n'' takie, że n' double n'' oraz $\text{S } n'' = n$ ”.

Dowód przebiegać będzie teraz następująco:

Dowód.

Przypadek $\frac{}{0 \text{ par}} ZeroE$ gdzie $n = 0$:

$0 \text{ double } 0$

wobec reguły $Dzero$

Przyjmujemy $n' = 0$.

Przypadek $\frac{n_p \text{ npar}}{S \ n_p \text{ par}} SuccE$ gdzie $n = S \ n_p$:

$n'_p \text{ double } n''_p$ oraz $S \ n''_p = n_p$ wobec założenia indukcyjnego

$S \ n'_p \text{ double } S \ S \ n''_p$ wobec reguły $Dsucc$ zastosowanej dla

$n'_p \text{ double } n''_p$

$S \ n'_p \text{ double } n$

wobec $S \ S \ n''_p = S \ n_p = n$

Przyjmujemy $n' = S \ n'_p$.

Przypadek $\frac{n_p \text{ par}}{S \ n_p \text{ npar}} SuccO$ gdzie $n = S \ n_p$:

$n'_p \text{ double } n_p$

wobec założenia indukcyjnego

Przyjmujemy $n' = n'_p$ oraz $n'' = n_p$. □

Techniki dowodzenia przez indukcję.

Dowód indukcyjny nie zawsze jest tak bezpośredni jak w przytoczonych powyżej przykładach. Może się też zdarzyć, iż dowodzone twierdzenie jest fałszywe. W takim wypadku próba dowodu może pomóc nam w znalezieniu kontrprzykładu do twierdzenia. Jeżeli twierdzenie daje się jednak udowodnić, a mimo to bezpośredni dowód nie daje rozstrzygnięcia, możemy spróbować jednej z popularnych technik dowodzenia przez indukcję. Poniżej przedstawiamy trzy z nich: przez zastosowanie lematu, uogólnienie twierdzenia i zastosowanie reguły odwracania.

Stosowanie lematów.

Zacznijmy od przedefiniowania kategorii mparen i lparen jako systemu osądów i reguł wnioskowania:

$$\begin{array}{c} \frac{}{\epsilon \text{ mparen}} Meps \qquad \frac{s \text{ mparen}}{(s) \text{ mparen}} \\[2ex] \frac{s_1 \text{ mparen} \quad s_2 \text{ mparen}}{s_1 s_2 \text{ mparen}} Mseq \\[2ex] \frac{}{\epsilon \text{ lparen}} Leps \qquad \frac{s_1 \text{ lparen} \quad s_2 \text{ lparen}}{(s_1) s_2 \text{ mparen}} Lseq \end{array}$$

Naszym celem jest udowodnienie, że s mparen pociąga s lparen. Okazuje się, że próba bezpośredniego dowodu przez indukcję reguł zawodzi i potrzebne będzie użycie lematu. Aby nieformalnie wyjaśnić, do czego potrzebny będzie lemat, rozważmy sytuację w której reguła $Mseq$ jest użyta do dowodu s mparen. Możemy napisać $s = s_1 s_2$ z wykorzystaniem s_1 mparen oraz s_2 mparen. Wobec założenia indukcyjnego o s_1 mparen oraz s_2 mparen, możemy wywnioskować s_1 lparen oraz s_1 lparen. Wobec s_1 lparen musimy rozważyć dwa podprzypadki:

- ▶ jeżeli $s_1 = \epsilon$, to wówczas $s = s_1 s_2 = s_2$ i s_2 lparen pociąga s lparen;
- ▶ jeżeli $s_1 = (s'_1)s''_1$ z wykorzystaniem s'_1 lparen i s''_1 lparen, to wówczas $s = (s'_1)s''_1 s_2$.

W drugim podprzypadku musimy udowodnić $s_1'' s_2$ lparen z wykorzystaniem s_1'' lparen oraz s_2 lparen, do czego z kolei nie odnosi się nic, co jest przez nas dowodzone. Tym samym konieczne jest zastosowanie następującego lematu:

Lemat

Jeżeli s lparen oraz s' lparen, to wówczas ss' lparen.

Jak udowodnić powyższy lemat z użyciem indukcji reguł? Na pierwszy rzut oka wydaje się to niemożliwe, albowiem lemat nie jest w postaci “*jeśli J zachodzi, to zachodzi też $P(J)$* ” – w lemacie poprzednik implikacji zawiera dwa osądy. Okazuje się jednak, że zasadę indukcji reguł można zastosować w zwyczajny sposób. Trik polega na zinterpretowaniu tezy lematu w następujący sposób:

Jeżeli s lparen, to wówczas jeżeli s' lparen, to wówczas ss' lparen.

W takiej postaci możemy zastosować zasadę indukcji reguł do osądu s lparen przyjmując $P(s \text{ lparen})$ jako “*jeżeli s' lparen to wówczas ss' lparen.*” Dowód lematu będzie wówczas wyglądał następująco:

Nie zapominajmy, że założeniem indukcyjnym wobec s lparen jest “jeżeli s' lparen, to wówczas ss' lparen”. W konsekwencji jeśli s' lparen jest dostępne jako założenie, to wówczas założenie indukcyjne wobec s lparen daje ss' lparen.

Dowód.

Przypadek $\frac{}{\epsilon \text{ lparen}} Leps$ gdzie $s = \epsilon$:

$s' \text{ lparen}$

wobec założenia

$ss' = \epsilon s' = s'$

$ss' \text{ lparen}$

wobec $s' \text{ lparen}$.

Przypadek $\frac{s_1 \text{ lparen} \quad s_2 \text{ lparen}}{(s_1)s_2 \text{ mparen}} Lseq$ gdzie $s = (s_1)s_2$:

$s' \text{ lparen}$

wobec założenia

$ss' = (s_1)s_2s'$

“jeżeli $s' \text{ lparen}$ to wówczas $s_2s' \text{ lparen}$ ”

wobec założenia

indukcyjnego dla $s_2 \text{ lparen}$

$s_2s' \text{ lparen}$

wobec założenia $s' \text{ lparen}$

$(s_1)s_2s' \text{ lparen}$ wobec reguły $Lseq$ zastosowanej do $s_1 \text{ lparen}$ oraz

$s_2s' \text{ lparen}$.



Zadanie

Udowodnić powyższy lemat z zastosowaniem zasady indukcji reguł dla osądu s' lparen.

Twierdzenie

Jeżeli s mparen, to wówczas s lparen.

Dowód.

Przypadek $\frac{}{\epsilon \text{ mparen}} Meps$ dla $s = \epsilon$:
 $\epsilon \text{ lparen}$

wobec reguły $Leps$.

Przypadek $\frac{s \text{ mparen}}{(s) \text{ mparen}} Mpar$ dla $s = (s')$:

$s' \text{ lparen}$ wobec $\frac{s' \text{ lparen} \quad \frac{}{\epsilon \text{ lparen}} Leps}{(s')\epsilon \text{ lparen}} Lseq$ oraz $(s') = (s')\epsilon$.

Przypadek $\frac{s_1 \text{ mparen} \quad s_2 \text{ mparen}}{s_1 s_2 \text{ mparen}} Mseq$ dla $s = s_1 s_2$:

$s_1 \text{ lparen}$ wobec założenia indukcyjnego dla $s_1 \text{ mparen}$

$s_2 \text{ lparen}$ wobec założenia indukcyjnego dla $s_2 \text{ mparen}$

$s_1 s_2 \text{ lparen}$ wobec lematu.

