Zadanie domowe 3

W dzisiejszym zadaniu domowym udowodnicie raz jeszcze twierdzenia z zadań 1 i 2 z wykorzystaniem termów dowodowych.

1. Termy dowodowe

W poprzednich zadaniach uczyliśmy się używać taktyk i taktykali do dowodzenia twierdzeń w logice zdań. Jako że termy dowodowe są zwartymi reprezentacjami dowodów, możemy łatwo przetłumaczyć wszystkie otrzymane już dowody na termy dowodowe. Na dobrą sprawę wystarczy użyć komendy Coq'a `Print` aby wyświetlić wszystkie takie termy. Na przykład możemy wyświetlić term dowodowy dla twierdzenia `A− > A` gdy ukończymy jego dowód tak, jak następuje:

```
Coq < Theorem id : A -> A.
1 subgoal
============================
A -> A
...
id < Qed.
intro x.
assumption.
id is defined
Coq < Print id.
id = fun x : A => x
: A − > A
```

Tym samym, gdy ukończyliście zadanie 1 i 2 możecie rozwiązać i 3-cie dosłownie w 5 minut. Zachęcam Was jednak, abyście pisali dowody w tym zadaniu "od zera" – dzięki temu nauczycie się czegoś nowego, no a poza tym to mnóstwo fajnej zabawy!

Chcąc użyć termu dowodowego w dowodzie korzystamy z komendy `Definition`. Na przykład, możemy zdefiniować `id` wskazując wprost jego dowód jak następuje:

```
Coq < Definition id : A − > A := fun x : A => x.
id is defined
Coq < Print id.
id = fun x : A => x
: A − > A
```

Syntaks `Definition` jest następujący:

$$\texttt{Definition}\ \langle identyfikator\rangle\ :\ \langle zdanie\rangle\ :=\ \langle term\ dowodowy\rangle$$

Termy dowodowe w Coq używają nieznacznie innego syntaksu od rachunku λ z typami prostymi. Poniższa tabela pokazuje, jak konwertować termy rachunku λ z typami prostymi na Coq:

Rachunek λ z typami prostymi	Coq
$\lambda x : A.M$	$\texttt{fun}x : A \texttt{=>} M$
$\lambda x : A.\lambda y : B.M$	$\texttt{fun}(x : A)(y : B) \texttt{=>} M$
$\lambda x : A.\lambda y : B. \ldots \lambda z : C.M$	$\texttt{fun}(x : A)(y : B) \ldots (z : C) \texttt{=>} M$
MN	MN
(M, N)	$\texttt{conj}MN$
$\mathsf{fst}\ M\ gdzie\ M : A \wedge B$	$\texttt{and\_ind}(\texttt{fun}(\texttt{p} : A)(\texttt{q} : B) \texttt{=>} \texttt{p})M$
$\mathsf{snd}\ M\ gdzie\ M : A \wedge B$	$\texttt{and\_ind}(\texttt{fun}(\texttt{p} : A)(\texttt{q} : B) \texttt{=>} \texttt{q})M$
$\mathsf{inl}_A M$	$\texttt{or\_introl}AM$
$\mathsf{inr}_A M$	$\texttt{or\_intror}AM$
$\mathsf{case}\ M\ \mathsf{of}\ \mathsf{inl}x.N1 \vert \mathsf{inr}\ y.N2\ gdzie\ M : A \vee B$	$\texttt{or\_ind}(\texttt{fun}\ x : A \texttt{=>} N1)(\texttt{fun} y : B \texttt{=>} N2)M$
$\mathsf{abort}_C M$	$\texttt{False\_ind}CM$

Zauważcie, że Coq dostarcza tylko jednego termu `and_ind` do eliminowania koniunkcji, o czym można myśleć jak o połączonych dwóch regułach eliminacji dla koniunkcji. Funkcjonuje to mniej więcej tak:

```
Coq < Check and_ind.
and_ind
: forall A B P : Prop, (A -> B -> P) -> A /\ B -> P
```

Sprawdźcie też funkcjonowanie termów `conj, or_iintrol, or_iintror, or_iind, False_ind`.

Ściągnijcie ze storny kursu plik:

`www.math.us.edu.pl/~pgladki/teaching/2012-2013/log_coq3.v`

i uzupełnijcie brakujące dowody z użyciem termów dowodowych. Gdy skończycie, prześlijcie uzupełniony plik na mój adres email **koniecznie** oznaczając Waszego maila tagiem `[aghlog]`. Termin oddania zadania domowego mija 19 kwietnia lub 19 maja (w zależności, do której grupy ćwiczeniowej uczęszczacie).