

Zestaw zadań 5: Sumy i sumy proste podprzestrzeni. Baza i wymiar. Rzędy macierzy. Struktura zbioru rozwiązań układu równań.

- (1) Pokazać, że jeśli $U_1 = \text{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$, $U_2 = \text{lin}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l)$, to

$$U_1 + U_2 = \text{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l).$$

- (2) Wykazać, że:

a) Suma $U_1 + \dots + U_k$ podprzestrzeni przestrzeni liniowej V jest podprzestrzenią V .

b) $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k \Leftrightarrow$ każdy wektor $v \in V$ ma jednoznaczne przedstawienie w postaci $v = u_1 + \dots + u_k$, gdzie $u_i \in U_i$ dla $i = 1, 2, \dots, k$.

- (3) Pokazać, że $\mathbb{R}^4 = U_1 \oplus U_2$, jeżeli

a) U_1 jest zbiorem rozwiązań równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, a $U_2 = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

b) U_1 jest zbiorem rozwiązań układu równań $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$, natomiast $U_2 = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

- (4) Pokazać, że $\mathbb{R}^4 = U_1 + U_2$, lecz $\mathbb{R}^4 \neq U_1 \oplus U_2$, jeżeli U_1 jest zbiorem rozwiązań równania $3x_1 -$

$2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0$, zaś $U_2 = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$. Do równania definiującego U_1 dołożyć jeszcze

jedno równanie tak, aby nowa podprzestrzeń rozwiązań U'_1 spełniała warunek $\mathbb{R}^4 = U'_1 \oplus U_2$.

- (5) Uzasadnić, że

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &= \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \oplus \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \oplus \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \oplus \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

W przypadku każdej sumy prostej przedstawić wektor $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ w postaci sumy wektora z pierwszego składnika sumy prostej i wektora z drugiego składnika sumy prostej.

- (6) Niech $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (zob. zadanie 4 z poprzedniego zestawu ??, str. ??). Zbiór funkcji nieparzystych oznaczmy literą $\mathbf{N}$, natomiast zbiór funkcji parzystych - literą $\mathbf{P}$. Pokazać, że $\mathbf{N}$ oraz $\mathbf{P}$ są podprzestrzeniami przestrzeni V oraz że $V = \mathbf{N} \oplus \mathbf{P}$. Przedstawić funkcję f daną wzorem

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

w postaci sumy funkcji parzystej i funkcji nieparzystej.

- (7) Niech V będzie przestrzenią liniową oraz niech $B \subset A$. Oznaczmy $U_B = \{f \in V^A : f(a) = \theta \text{ dla } a \in B\}$. Pokazać, że U_B jest podprzestrzenią przestrzeni V^A . Dla jakich podzbiorów B oraz C zbioru A zachodzi równość $V^A = U_B + U_C$, a dla jakich równość $V^A = U_B \oplus U_C$?
- (8) Sprawdzić, czy $K_n^n = \mathbf{S}_n \oplus \mathbf{A}_n$ (por. zadanie ?? str. ??).
- (9) W zbiorze $\mathbb{Z}_6$ wyróżnimy dwa podzbiory: $U = \{0, 2, 4\}$ oraz $W = \{0, 3\}$. Pokazać, że U jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{Z}_3$ i W jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_6 = U + W$, $U \cap W = \{0\}$. Czy $\mathbb{Z}_6$ jest sumą prostą przestrzeni liniowych U i W ?
- (10) Sprawdzić, że podzbiór $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{Z}_3^3$ jest podprzestrzenią liniową, a podzbiór $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{Q}^3$ nie jest podprzestrzenią.
- (11) (*Modułarność kraty podprzestrzeni*) Niech U_1, U_2, U_3 będą podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej V . Udowodnić, że
- $U_1 + (U_2 \cap U_3) \subset (U_1 + U_2) \cap (U_1 + U_3)$,
 - $(U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3) \subset U_1 \cap (U_2 + U_3)$,
 - $(U_1 \cap U_2) + (U_2 \cap U_3) + (U_3 \cap U_1) \subset (U_1 + U_2) \cap (U_2 + U_3) \cap (U_3 + U_1)$,
 - $(U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3) = U_1 \cap (U_2 + (U_1 \cap U_3))$,
 - jeśli $U_1 \subset U_3$, to $U_1 + (U_2 \cap U_3) = (U_1 + U_2) \cap U_3$.
- (12) (*Niedystrybutywność kraty podprzestrzeni*) Podaj przykład podprzestrzeni U_1, U_2, U_3 przestrzeni $\mathbb{R}^2$ dla których
- $U_1 + (U_2 \cap U_3) \neq (U_1 + U_2) \cap (U_1 + U_3)$,
 - $(U_1 + U_2) \cap U_3 \neq (U_1 \cap U_3) + (U_1 \cap U_3)$.
- (13) (G. Birkhoff¹) Sprawdzić, że z podprzestrzeni $\text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right), \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right), \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right), \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ za pomocą operacji $+$ i $\cap$ można utworzyć nieskończenie wiele różnych podprzestrzeni przestrzeni $\mathbb{R}^3$. (*Wskazówka: wygodnie jest rysować na płaszczyźnie $z = 1$ przekroje badanych podprzestrzeni z tą płaszczyzną; nie wszystkie podprzestrzenie mają z nią niepusty przekrój!*)
- (14) Wykazać, że następujące pary przestrzeni wektorowych są izomorficzne:
- $U_1 \oplus U_2$ i $U_1 \times U_2$,
 - $U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$ i $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_k$,
 - $(U_1 + U_2) / (U_1 \cap U_2)$ i $U_1 / (U_1 \cap U_2) \times U_2 / (U_1 \cap U_2)$,
- gdzie $U_1, U_2, \dots, U_k$ są podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V .
- (15) Pokazać, że wektory $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{Q}^n$ i znaleźć współrzędne wektora β w tej bazie, jeżeli
- $n = 3; \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{bmatrix}$.
 - $n = 3; \alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}$.

¹Garret Birkhoff (ur. 1911 r.) - współczesny matematyk amerykański, nie mylić z George D. Birkhoffem (1884 - 1944), amerykańskim specjalistą od równań różniczkowych.

$$c) n = 4; \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(16) Wyznaczyć bazy podprzestrzeni rozwiązań następujących układów równań (nad $\mathbb{R}$):

$$a) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}.$$

(17) Wyznaczyć bazę i wymiar² podprzestrzeni $\text{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ przestrzeni $\mathbb{Q}^4$ gdy:

$$\begin{aligned} a) \alpha_1 &= \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}; \\ b) \alpha_1 &= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 15 \\ 17 \end{bmatrix}, \alpha_5 = \begin{bmatrix} 7 \\ -6 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix}; \\ c) \alpha_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 8 \\ -3 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 26 \\ -9 \\ -12 \end{bmatrix}, \alpha_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(18) Wybrać bazę podprzestrzeni $\text{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \subset \mathbb{Z}_7^m$ spośród wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, jeżeli

$$\begin{aligned} a) \alpha_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \\ b) \alpha_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}; \\ c) \alpha_1 &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_5 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}; \\ d) \alpha_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Wybrać dowolne bazy powyższych podprzestrzeni, niekoniecznie spośród wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

²Pojęcie wymiaru przestrzeni wektorowej pochodzi od Grassmanna.

(19) Czy można znaleźć bazę przestrzeni K^4 złożoną z wektorów postaci:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \quad \text{b) } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1.$$

(20) Pokazać, że jeśli wektory $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tworzą bazę przestrzeni wektorowej V nad ciałem K , to dla dowolnych $i, j = 1, \dots, n, i \neq j$, wektory:

a) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i + x\alpha_j, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n$ dla $x \in K$,

b) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, x\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n$ dla $x \in K, x \neq 0$

również tworzą bazę przestrzeni V .

(21) Znaleźć bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, w której wektor ε_1 ma współrzędne $(1, 2, 1)$ oraz bazę, w której wektor ten ma współrzędne $(1, 1, 1)$, a wektor $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ współrzędne $(1, 0, 0)$.

(22) Znaleźć bazę każdej z niżej wypisanych podprzestrzeni przestrzeni $\mathbb{R}^4$ oraz bazę sumy algebraicznej $U_i + U_j$, jak i części wspólnej $U_i \cap U_j$ każdej pary podprzestrzeni:

$$\text{a) } U_1 = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}\right), U_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \right\}.$$

$$\text{b) } U_1 = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right), U_2 = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}\right),$$

$$U_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}.$$

$$\text{c) } U_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \right\},$$

$$U_2 = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}\right).$$

$$\text{d) } U_1 = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}\right), U_2 = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right).$$

(23) Niech ciało K ma q elementów. Obliczyć, ile przestrzeni K^n ma różnych

a) wektorów, b) baz.

(24) Obliczyć rzędy³ następujących macierzy (nad ciałem $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych):

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{b)} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 12 & 9 & 8 & -7 & 3 \\ -12 & -5 & -8 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{c)} \quad \begin{bmatrix} 8 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \\
 \text{d)} \quad & \begin{bmatrix} 1 & 7 & 7 & 9 \\ 7 & 5 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{e)} \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & -7 & 4 & 5 \\ 7 & 1 & 5 & 3 \\ -5 & -3 & -3 & -1 \\ 1 & -5 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{f)} \quad \begin{bmatrix} 8 & -4 & 5 & 5 & 9 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \\
 \text{g)} \quad & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{h)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{i)} \quad \begin{bmatrix} 4 & 4 & -1 & 0 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 6 & 6 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \\
 \text{j)} \quad & \begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & -7 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

(25) Obliczyć rzędy następujących macierzy stopnia n nad ciałem $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych:

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{b)} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{c)} \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{bmatrix}, \\
 \text{d)} \quad & \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{bmatrix}, \quad \text{e)} \quad \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & a & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & a \end{bmatrix}, \\
 \text{f)} \quad & \begin{bmatrix} 1 & n & n & \cdots & n & n \\ n & 2 & n & \cdots & n & n \\ n & n & 3 & \cdots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n-1 & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{bmatrix}, \quad \text{g)} \quad \begin{bmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

³Pojęcie rzędu macierzy wprowadził Sylvester; nazwa jest późniejsza.

(26) W zależności od parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ wyznaczyć rząd macierzy:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{bmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{bmatrix}, \quad \text{b)} \quad \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -\lambda & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -\lambda & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -\lambda & 1 \end{bmatrix}, \\ \text{c)} \quad & \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}, \quad \text{d)} \quad \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 17 & 7 & 1 \\ 1 & 10 & 4 & \lambda \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{e)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & -1 & 10 \\ -1 & \lambda & -6 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(27) Obliczyć rzędy następujących macierzy:

$$\text{a)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_7, \quad \text{b)} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 9 & 8 & 5 \\ 1 & 1 & 12 & 2 & 11 \end{bmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_{13}, \quad \text{c)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_5.$$

(28) Obliczyć rzędy następujących macierzy zespolonych:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{bmatrix} 1+i & 1+i & 1-i \\ 1-i & -1+i & 1+3i \\ 1 & i & 1+i \end{bmatrix}, \quad \text{b)} \quad \begin{bmatrix} 1-i & i & -1 \\ 1 & 0 & 2i \\ i & 2-i & 1+i \end{bmatrix}, \\ \text{c)} \quad & \begin{bmatrix} 1+2i & 1-i & 2+3i & 2 \\ 3+i & -2i & 5+i & 2-2i \\ 5i & 3-i & 1+8i & 4+2i \end{bmatrix}, \quad \text{d)} \quad \begin{bmatrix} 1+i & 2-i & 1+2i \\ 1-5i & -7-4i & 4-7i \\ 1-i & -1-2i & 2-i \\ 2+4i & 7-i & 1+7i \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(29) Wykazać, że $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$.

(30) Wykazać, że jeśli A oraz B są macierzami o tej samej liczbie wierszy, to $r([A|B]) \leq r(A) + r(B)$.

(31) Wykazać, że jeśli A oraz B są macierzami rzeczywistymi o tej samej liczbie wierszy, to

$$r\left(\begin{bmatrix} A & B \\ 2A & -5B \end{bmatrix}\right) = r(A) + r(B). \text{ To samo nad } \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_5 \text{ i nad } \mathbb{Z}_7.$$

(32) Obliczyć rzędy macierzy współczynników oraz rzędy macierzy uzupełnionych następujących układów równań nad $\mathbb{R}$. Dla każdego układu równań znaleźć układ fundamentalny (tzn. bazę przestrzeni kierunkowej zbioru rozwiązań).

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{cases} 2x - 3y + 5z + 7t = 1 \\ 4x - 6y + 2z + 3t = 2 \\ 2x - 3y - 11z - 15t = 1 \end{cases} ; \quad \text{(b)} \quad \begin{cases} 2x + 5y - 8z = 8 \\ 4x + 3y - 9z = 9 \\ 2x + 3y - 5z = 7 \\ x + 8y - 7z = 12 \end{cases} ; \\ \text{(c)} \quad & \begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 6x + 8y + 2z + 5t = 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 13 \end{cases} ; \quad \text{(d)} \quad \begin{cases} 3x - 5y + 2z + 4t = 2 \\ 7x - 4y + z + 3t = 5 \\ 5x + 7y - 4z - 6t = 3 \end{cases} ; \\ \text{(e)} \quad & \begin{cases} 3x - 2y + 5z + 4t = 2 \\ 6x - 4y + 4z + 3t = 3 \\ 9x - 6y + 3z + 2t = 4 \end{cases} ; \quad \text{(f)} \quad \begin{cases} 8x + 6y + 5z + 2t = 21 \\ 3x + 3y + 2z + t = 10 \\ 4x + 2y + 3z + t = 8 \\ 3x + 5y + z + t = 15 \\ 7x + 4y + 5z + 2t = 18 \end{cases} ; \end{aligned}$$

$$(g) \begin{cases} x + y + 3z - 2t + 3w = 1 \\ 2x + 2y + 4z - t + 3w = 2 \\ 3x + 3y + 5z - 2t + 3w = 1 \\ 2x + 2y + 8z - 3t + 9w = 2 \end{cases}; \quad (h) \begin{cases} 2x - y + z + 2t + 3w = 2 \\ 6x - 3y + 2z + 4t + 5w = 3 \\ 6x - 3y + 2z + 8t + 13w = 9 \\ 4x - 2y + z + t + 2w = 1 \end{cases};$$

$$(i) \begin{cases} 6x + 4y + 5z + 2t + 3w = 1 \\ 3x + 2y + 4z + t + 2w = 3 \\ 3x + 2y - 2z + t = -7 \\ 9x + 6y + z + 3t + 2w = 2 \end{cases}.$$

- (33) Obliczyć rzędy macierzy współczynników oraz rzędy macierzy uzupełnionych następujących układów równań nad $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{Z}_p$. Dla każdego układu równań znaleźć układ fundamentalny (tzn. bazę przestrzeni kierunkowej zbioru rozwiązań).

$$(a) \begin{cases} 2x + 7y + 3z + t = 6 \\ 3x + 5y + 2z + 2t = 4 \\ 9x + 4y + z + 7t = 2 \end{cases}, p = 11; \quad (b) \begin{cases} 9x - 3y + 5z + 6t = 4 \\ 9x - 3y + 5z + 6t = 4 \\ 3x - y + 3z + 14t = -8 \end{cases}, p = 13;$$

$$(c) \begin{cases} 6x + 3y + 2z + 3t + 4w = 5 \\ 4x + 2y + z + 2t + w = 4 \\ 4x + 2y + 3z + 2t + w = 0 \\ 2x + y + 7z + 3t + 2w = 1 \end{cases}, p = 11 \quad (d) \begin{cases} 2x - y + 3z - 7t = 5 \\ 6x - 3y + z - 4t = 7 \\ 4x - 2y + 14z - 31t = 18 \end{cases}, p = 37$$

$$(e) \begin{cases} x + 2y + 3z - 2t + w = 4 \\ 3x + 6y + 5z - 4t + 3w = 5 \\ x + 2y + 7z - 4t + w = 11 \\ 2x + 4y + 2z - 3t + 3w = 6 \end{cases}, p = 13 \quad (f) \begin{cases} 3x + 2y + 2z + 2t = 2 \\ 2x + 3y + 2z + 5t = 3 \\ 9x + y + 4z - 5t = 1 \\ 2x + 2y + 3z + 4t = 5 \\ 7x + y + 6z - t = 7 \end{cases}, p = 7$$

$$(g) \begin{cases} 2x + 3y + z + 2t = 4 \\ 4x + 3y + z + t = 5 \\ 5x + 11y + 3z + 2t = 2 \\ 2x + 5y + z + t = 1 \\ x - 7y - z + 2t = 7 \end{cases}, p = 17$$

- (34) Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste x, y, z, t dla których:

$$a) \begin{cases} x + 4y + 10z + 20t = x \\ -6y - 20z - 45t = y \\ 4y + 15z + 36t = z \\ -y - 4z - 10t = t \end{cases}, \quad b) \begin{cases} x + 4y + 10z + 20t = -x \\ -6y - 20z - 45t = -y \\ 4y + 15z + 36t = -z \\ -y - 4z - 10t = -t \end{cases}, \quad c) t = 0, \quad d) x = y.$$

Znaleźć bazę podprzestrzeni rozwiązań każdego z powyższych układów równań.

- (35) W zależności od parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ rozwiązać układy równań:

$$a) \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ 2x + ay + 2z = b \end{cases}, \quad b) \begin{cases} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = 1 \\ x + y + z + t = b \end{cases}.$$

- (36) W zależności od parametru $a \in \mathbb{Z}_7$ wyznaczyć wymiary podprzestrzeni rozwiązań układów równań:

$$a) \begin{cases} 2x + 2y + az + t = 0 \\ x + y + 6z + at = 0 \\ x + y + 2t = 0 \end{cases}, \quad b) \begin{cases} x + ay + 4z + 3t = 0 \\ ay + 3z + t = 0 \end{cases}.$$

- (37) Dla jakich parametrów $a, b \in \mathbb{Z}_7$, układy równań liniowych U_1 oraz U_2 (nad ciałem $\mathbb{Z}_7$) mają równe zbiory rozwiązań, jeżeli

$$U_1 : \begin{cases} x + 2y + 6z + 4t = 1 \\ 3x + y + 2z + t = 0 \end{cases} \quad U_2 : \begin{cases} 5x + ay + 2t = 2 \\ 3x + 5y + bz = 1 \end{cases}$$

- (38) W zależności od parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ rozwiązać układy równań:

$$\text{a) } \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x + by + z = 3 \\ x + 2by + z = 4 \end{cases}, \quad \text{c) } \begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}.$$

- (39) Dla jakich parametrów $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ każdy układ równań z danymi lewymi stronami ma rozwiązanie?

$$\text{a) } \begin{cases} ax + by + cz + dt \\ bx - ay + dz - ct \\ cx - dy - az + bt \\ dx + cy - bz - at \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} a^2x + ay + az + at \\ ax + (b^2 - 1)y + (2b + 1)z + (3b + 1)t \\ ax + (2b + 1)y + (c^2 + 5)z + (3c + 7)t \\ ax + (3b + 1)y + (3c + 7)z + (d^2 + 1)t \end{cases}.$$

Jak zmieni się odpowiedź, jeżeli dopuścić $a, b, c, d \in \mathbb{C}$? Podać wzory na rozwiązanie układu a) oraz b) (przy dowolnych prawych stronach równań).

- (40) Jeśli $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ są wektorami przestrzeni współrzędnych K^n , to symbolem $[\alpha, \beta, \gamma, \dots]$ oznaczamy macierz, której kolumny są utworzone ze współrzędnych wektorów $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Dla $k \leq n$:

a) Sprawdzić, że wektory $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki podzbiór $\{i_1, i_2, \dots, i_{n-k}\}$ zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, że

$$\det[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \dots, \varepsilon_{i_{n-k}}] \neq 0.$$

b) Sprawdzić, że wektory $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\{i_1, i_2, \dots, i_{n-k}\}$ zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ zachodzi równość

$$\det[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \dots, \varepsilon_{i_{n-k}}] = 0.$$

c) Zapisać oba warunki za pomocą wzorów, w których występują tylko współrzędne wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$.

- (41) Przypuśćmy, że $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in K^n$ oraz że wektory $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ są liniowo niezależne. Oznaczmy $\xi := [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$. Niech $\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \dots, \varepsilon_{i_{n-k}}$ będą takie, że

$$\det[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \dots, \varepsilon_{i_{n-k}}] \neq 0.$$

Pokazać, że warstwa $\alpha + \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ przestrzeni K^n jest zbiorem rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} \det[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \xi - \alpha, \varepsilon_{i_2}, \dots, \varepsilon_{i_{n-k}}] = 0 \\ \det[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \varepsilon_{i_1}, \xi - \alpha, \dots, \varepsilon_{i_{n-k}}] = 0 \\ \vdots \\ \det[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \dots, \xi - \alpha] = 0 \end{cases}.$$

(42) Znaleźć układ równań liniowych nad $\mathbb{R}$, którego zbiorem rozwiązań jest:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}\right), \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}\right), \\ \text{c) } & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right), \quad \text{d) } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$