Zestaw zadań 1: NWD, NWW i algorytm Euklidesa. Grupy, pierścienie i ciała.

(1) Podaj resztę z dzielenia liczby a przez b, jeżeli:
   (a) $a = 254$, $b = 15$,
   (b) $a = 254$, $b = -15$,
   (c) $a = -254$, $b = 15$,
   (d) $a = -254$, $b = -15$.

(2) Oblicz:
   (a) $NWD(60775, 120175)$ i $NWW(60775, 120175)$,
   (b) $NWD(107525, 20075)$ i $NWW(107525, 20075)$,
   (c) $NWD(150425, 65725)$ i $NWW(150425, 65725)$.

(3) Dla jakiej wartości parametru a równanie $644x - 588y = a$ ma rozwiązanie?

(4) Wyznaczyć wszystkie całkowite rozwiązania równania
   (a) $357x + 403y = 208$,
   (b) $97x + 123y = 360$,
   (c) $666x + 527y = 614$.

(5) Wyznaczyć wszystkie całkowite rozwiązania równania
   (a) $6x + 10y + 5z = 1$,
   (b) $2x + 8y + 112z = 9$,
   (c) $2x + 42y + 70z + 245t = 1$.

(6) Wyznaczyć wszystkie całkowite rozwiązania układu równań
   (a) $\begin{cases} x + y = 180, \\ NWD(x, y) = 30 \end{cases}$,
   (b) $\begin{cases} x + y = 720, \\ NWD(x, y) = 4 \end{cases}$.

(7) Do przewozu zboża są do dyspozycji worki 60-cio kilogramowe i 80-cio kilogramowe. Ile potrzeba poszczególnych worków do przewozu 440 kg zboża (zakładamy że worki muszą być pełne)?

(8) Ile biletów po 3 zł i po 5 zł można kupić za 149 zł, jeśli należy wydać wszystkie pieniądze?

(9) Fabryka wysyła towar w paczkach po 3 kg i po 5 kg. Wykazać, że można w ten sposób wysłać każdą całkowitą ilość kilogramów większą niż 7. Czy można w tym zadaniu zastąpić dane liczby innymi liczbami?

(10) Ile wspólnych wyrazów ma ją stuwyrazowe ciągi arytmetyczne $5, 8, 11, 14, \ldots$ oraz $3, 7, 11, 15, \ldots$?

(11) Załóżmy, że dzisiaj jest czwartek godzina 14^{00}. Jaki dzień tygodnia będzie dokładnie za 10000 dni (lat)[1]? Jaki dzień tygodnia i która godzina będzie za 13551 godzin?

(12) Sprawdzić łączność dodawania, łączność mnożenia oraz rozdzielność mnożenia względem dodawania w $\mathbb{Z}_2$.

(13) Sprawdzić, czy jest ciałem system $\mathbb{F}_4 =< \{0, 1, a, b\}, 0, 1, +, \cdot >$ w którym działania $+$ i $\cdot$ określone są tabelkami:

[1] W obowiązującym od 1582 r. kalendarzu gregoriańskim, opracowanym przez Luigi Lilio (ok. 1510 - ok. 1560 r.) 366 dni mają lata, których numer dzieli się przez 4 ale nie dzieli się przez 100, oraz lata, których numer dzieli się przez 400; pozostałe lata mają 365 dni. W ten sposób średni rok kalendarzowy ma $365,2425$ dni, a średni rok zwrotnikowy ma 365 dni, 5 godzin, 48 minut i 46 sekund, czyli $365,2422$ doby.

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

$\cdot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

(14) (a) Ułożyć tabelkę funkcji $x \mapsto x^2$ w $\mathbb{Z}_{11}$.
(b) Ułożyć tabelkę funkcji $x \mapsto x^{-1}$ w $\mathbb{Z}_{13}$
(c) Wyznaczyć dziedzinę oraz ułożyć tabelkę funkcji $x \mapsto \dfrac{x+2}{2x-1}$ w $\mathbb{Z}_7$.

(15) Rozwiązać równanie:
(a) $5x^2+5x+1=0$ w $\mathbb{Z}_{11}$, (b) $x^2+x+3=0$ w $\mathbb{Z}_5$,
(c) $2x^2+2x+2=0$ w $\mathbb{Z}_{13}$, (d) $2x^3+3x2+x-4=0$ w $\mathbb{Z}_7$.

(16) Sprawdzić, że połowa różnych od zera elementów ciała $\mathbb{Z}_{13}$ to kwadraty elementów $\mathbb{Z}_{13}$.

(17) Dla jakich wartości parametru $m \in K$ równanie $mx^2+(2m+1)x+m-2$ ma dwa różne rozwiązania w ciele K
(a) gdy $K=\mathbb{Z}_{11}$? (b) gdy $K=\mathbb{Z}_{13}$?

(18) Wykazać, że każdy element ciała $\mathbb{Z}_5$ jest sześcianem elementu $\mathbb{Z}_5$. To samo dla ciała $\mathbb{Z}_{11}$. A jak to będzie w przypadku ciała $\mathbb{Z}_{13}$?

(19) Sprawdzić czy istnieją – i wyznaczyć, jeśli istnieją – pierwiastki kwadratowe z -1 w ciele $\mathbb{Z}_p$ dla $p=2,3,5,7,11,13$.

(20) Rozwiązać równanie $5x=2$ w $\mathbb{Z}_{65537}$.

(21) Znaleźć taki element $\mathbb{Z}_5$, że każdy inny element różny od 0 jest jego potęgą. To samo dla ciał $\mathbb{Z}_7$ oraz $\mathbb{Z}_{11}$.

(22) Sprawdzić, że każdy różny od 0 element ciała $\mathbb{Z}_5$ podniesiony do pewnej potęgi daje 1. To samo dla ciał $\mathbb{Z}_7$ oraz $\mathbb{Z}_{11}$.

(23) Wykonać działania: $(6^2\cdot 3+5\cdot 4-1)\cdot(5\cdot 12-7)^{-1}$ w $\mathbb{Z}_{17}$ oraz w $\mathbb{Z}_{23}$.

(24) Rozwiązać układ równań
(a) $\begin{cases} 3x+5y=2 \\ 4x+9y=4 \end{cases}$ w $\mathbb{Z}_{13}$ i w $\mathbb{Z}_7$ (b) $\begin{cases} 5x+4y=a \\ 4x+3y=b \end{cases}$ w $\mathbb{Z}_{11}$ i w $\mathbb{Z}_5$.

(25) Podaj liczbę rozwiązań układu równań $\begin{cases} 3x+4y=2 \\ 9x+y=7 \end{cases}$ w ciele $\mathbb{Z}_{11}$. To samo w $\mathbb{Z}_{13}$ i $\mathbb{Z}_{17}$.

(26) (H. Steinhaus[2]) Obliczyć wszystkie wyrazy ciagu $5^{5n+1}+4^{5n+2}+3^{5n}$ w ciele $\mathbb{Z}_{11}$.

(27) (H. Steinhaus) Sprawdzić, że $3^{105}+4^{105}=0$ w ciałach $\mathbb{Z}_7$, $\mathbb{Z}_{13}$, $\mathbb{Z}_{181}$, $\mathbb{Z}_{379}$, oraz że $3^{105}+4^{105}\neq 0$ w $\mathbb{Z}_5$ ani w $\mathbb{Z}_{11}$.

(28) Wyprowdzić wzór na funkcję: $f(k)=\frac{1}{2}$ w $\mathbb{Z}_{2k-1}$.

(29) Obliczyć $\frac{1}{5}$ w $\mathbb{Z}_n$ dla $n=6,7,8,9,11,13$.

[2]Hugo Dionizy Steinhaus (1887 - 1972) słynny matematyk polski; po II wojnie światowej pracował we Wrocawiu.