

## 6. WYKŁAD 6.

## 6.1. Sumy i sumy proste podprzestrzeni.

**Uwaga 6.1.** Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $F$ , niech  $U_1, \dots, U_n < V$ .

(1) Zbiór

$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$$

jest podprzestrzenią przestrzeni  $V$ .

(2) Zbiór

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n = \{u_1 + u_2 + \dots + u_n : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, \dots, u_n \in U_n\}$$

jest podprzestrzenią przestrzeni  $V$ .

*Dowód.* Pokażemy część (1) uwagi, dowód części (2) przebiega analogicznie. Ustalmy  $u_1 + u_2, u'_1 + u'_2 \in U_1 + U_2$ , gdzie  $u_1, u'_1 \in U_1$  oraz  $u_2, u'_2 \in U_2$ . Wówczas:

$$(u_1 + u_2) + (u'_1 + u'_2) = \underbrace{(u_1 + u'_1)}_{\in U_1} + \underbrace{(u_2 + u'_2)}_{\in U_2} \in U_1 + U_2.$$

Ponadto dla  $a \in F$ :

$$a(u_1 + u_2) = \underbrace{(au_1)}_{\in U_1} + \underbrace{(au_2)}_{\in U_2} \in U_1 + U_2$$

□

**Definicja 6.2.** Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $F$ , niech  $U_1, \dots, U_n < V$ . Podprzestrzeń  $U_1 + U_2$  nazywamy **sumą podprzestrzeni**  $U_1$  i  $U_2$ , podprzestrzeń  $U_1 + \dots + U_n$  nazywamy **sumą podprzestrzeni**  $U_1, \dots, U_n$ .

**Przykład:**

(5) Rozważmy przestrzeń liniową  $V$  i jej podprzestrzenie  $U = \text{lin}(u_1, \dots, u_n)$  oraz  $W = \text{lin}(w_1, \dots, w_m)$ . Wówczas:

$$\begin{aligned} v \in U + W &\Leftrightarrow v = u + w \text{ oraz } u \in U, w \in W \\ &\Leftrightarrow v = u + w \text{ oraz } u = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n, w = b_1 w_1 + \dots + b_m w_m, \\ &\quad \text{dla pewnych } a_1, \dots, a_n \in F, b_1, \dots, b_m \in F \\ &\Leftrightarrow v = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n + b_1 w_1 + \dots + b_m w_m, \\ &\quad \text{dla pewnych } a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in F \\ &\Leftrightarrow v \in \text{lin}(u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_m). \end{aligned}$$

A zatem  $\text{lin}(u_1, \dots, u_n) + \text{lin}(w_1, \dots, w_m) = \text{lin}(u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_m)$ .

**Uwaga 6.3.** Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $F$ , niech  $U_1, \dots, U_n < V$ .

(1) Następujące dwa warunki są równoważne:

(a)  $U_1 \cap U_2 = \{\theta\}$ ,

(b) jeśli  $u_1 + u_2 = u'_1 + u'_2$ , gdzie  $u_1, u'_1 \in U_1$ ,  $u_2, u'_2 \in U_2$ , to  $u_1 = u'_1$  oraz  $u_2 = u'_2$ .

(2) Następujące dwa warunki są równoważne:

(a)  $U_i \cap (U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_n) = \{\theta\}$ , dla  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,

(b) jeśli  $u_1 + u_2 + \dots + u_n = u'_1 + u'_2 + \dots + u'_n$ , gdzie  $u_i, u'_i \in U_i$ , dla  $i \in \{1, \dots, n\}$ , to  $u_i = u'_i$ , dla  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

*Dowód.* Pokażemy część (1) uwagi, dowód części (2) przebiega analogicznie. Załóżmy, że  $U_1 \cap U_2 = \{\theta\}$  i niech  $u_1 + u_2 = u'_1 + u'_2$ , dla pewnych  $u_1, u'_1 \in U_1$ ,  $u_2, u'_2 \in U_2$ . Wówczas  $U_1 \ni u_1 - u'_1 = u'_2 - u_2 \in U_2$  i skoro  $U_1 \cap U_2 = \{\theta\}$ , więc  $u_1 - u'_1 = \theta$  oraz  $u'_2 - u_2 = \theta$ , a stąd  $u_1 = u'_1$  oraz  $u_2 = u'_2$ .

Na odwrót, załóżmy, że jeśli  $u_1 + u_2 = u'_1 + u'_2$ , gdzie  $u_1, u'_1 \in U_1$ ,  $u_2, u'_2 \in U_2$ , to  $u_1 = u'_1$  oraz  $u_2 = u'_2$ . Ustalmy  $u \in U_1 \cap U_2$ . Wówczas:

$$u = \underbrace{u}_{\in U_1} + \underbrace{\theta}_{\in U_2} = \underbrace{\theta}_{\in U_1} + \underbrace{u}_{\in U_2},$$

a zatem  $u = \theta$ . □

**Definicja 6.4.** Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $F$ , niech  $U_1, \dots, U_n < V$ . Jeżeli  $V = U_1 + U_2$  oraz spełniony jest jeden z dwóch równoważnych warunków Uwagi 6.3 (1), to mówimy, że  $V$  jest **sumą prostą** podprzestrzeni  $U_1$  i  $U_2$ , co oznaczamy przez  $V = U_1 \oplus U_2$ . Podprzestrzeń  $U_2$  nazywamy wtedy **dopełnieniem liniowym** podprzestrzeni  $U_1$ .

Jeżeli  $V = U_1 + U_2 + \dots + U_n$  oraz spełniony jest jeden z dwóch równoważnych warunków Uwagi 6.3 (2), to mówimy, że  $V$  jest **sumą prostą** podprzestrzeni  $U_1, U_2, \dots, U_n$ , co oznaczamy przez  $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_n$ .

**Uwaga 6.5.** Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $F$ , niech  $U_1, \dots, U_n < V$  i niech  $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_n$ . Wówczas  $V \cong U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ .

*Dowód.* Zdefiniujemy odwzorowanie  $f : V \rightarrow U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$  wzorem

$$f(u_1 + u_2 + \dots + u_n) = (u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Sprawdzenie, że jest to dobrze określony izomorfizm pozostawiamy czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie. □

## 6.2. Baza i wymiar.

**Definicja 6.6.** Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $F$ . Podzbiór  $B \subset V$  nazywamy **bazą** przestrzeni  $V$ , jeżeli:

- (1)  $B$  jest liniowo niezależny,
- (2)  $B$  jest generujący, tzn.  $\text{lin}(B) = V$ .

### Przykłady:

- (1) Rozważmy przestrzeń  $\mathbb{Q}^n$ , lub  $\mathbb{R}^n$ , lub  $\mathbb{C}^n$ , lub  $\mathbb{Z}_p^n$ , lub  $GF(p^m)^n$ , lub, najogólniej,  $F^n$ , gdzie  $F$  jest dowolnym ciałem. Niech

$$\epsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \epsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \epsilon_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wówczas  $(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$  jest bazą. Nazywamy ją często **bazą kanoniczną**.

(2) Rozważmy przestrzeń  $M_n^m(F)$  i niech

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \leftarrow i$$

↑  
 $j$

Wówczas  $(\epsilon_{11}, \dots, \epsilon_{1n}, \epsilon_{21}, \dots, \epsilon_{2n}, \dots, \epsilon_{m1}, \dots, \epsilon_{mn})$  jest bazą.

(3) Rozważmy przestrzeń  $F[x]$ . Wówczas  $(1, x, x^2, x^3, \dots)$  jest bazą.

(4) Rozważmy przestrzeń  $\mathbb{C}$  nad ciałem  $\mathbb{R}$ . Wówczas  $(1, i)$  jest bazą.

**Twierdzenie 6.7.** Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $F$ , niech  $B \subset V$ . Następujące warunki są równoważne:

- (1)  $B$  jest bazą,
- (2)  $B$  jest maksymalnym liniowo niezależnym podzbiorem  $V$ .

*Dowód.* (1)  $\Rightarrow$  (2) : Załóżmy, że  $B$  jest bazą. Przypuśćmy, że istnieje liniowo niezależny podzbiór  $B \subsetneq B' \subset V$ . Niech  $v \in B' \setminus B$ . Ponieważ  $V = \text{lin}(B)$ , więc  $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_mv_m$ , dla pewnych  $v_1, \dots, v_m \in B$  oraz  $a_1, \dots, a_m \in F$ . Wówczas  $1 \cdot v - a_1v_1 - \dots - a_mv_m = \theta$  i  $1 \neq 0$ , a więc  $B$  nie jest liniowo niezależny.

(2)  $\Rightarrow$  (1) : Załóżmy, że  $B$  jest maksymalnym liniowo niezależnym podzbiorem  $V$ . Wystarczy pokazać, że  $B$  jest generujący. Ustalmy  $v \in V$ . Jeśli  $v \in B$ , to  $v \in \text{lin}(B)$ . Jeśli  $v \notin B$ , to  $B \cup \{v\}$  jest liniowo zależny, a więc  $av + a_1v_1 + \dots + a_mv_m = \theta$  dla pewnych  $a, a_1, \dots, a_m \in F$  oraz  $v_1, \dots, v_m \in B$ . Ponieważ  $v_1, \dots, v_m$  są liniowo niezależne, więc  $a \neq 0$ . Zatem  $v = -\frac{a_1}{a}v_1 - \dots - \frac{a_m}{a}v_m \in \text{lin}(B)$ .  $\square$

**Wniosek 6.8.** Każda przestrzeń liniowa ma bazę.

*Dowód.* Jeżeli  $V = \{\theta\}$ , to zbiór pusty jest bazą. Jeżeli  $V \neq \{\theta\}$ , to istnieje  $\theta \neq v \in V$  i  $A = \{v\}$  jest zbiorem liniowo niezależnym. W niepustej rodzinie

$$\mathcal{X} = \{B \subset V : A \subset B \text{ i } B \text{ jest liniowo niezależny}\}$$

uporządkowanej przez inkluzję każdy łańcuch ma ograniczenie górne, a więc wobec lematu Kuratowskiego-Zorna istnieje element maksymalny, który wobec Twierdzenia 6.7 jest bazą.  $\square$

**Przykład:**

- (5) Rozważmy przestrzeń  $\mathbb{R}$  nad ciałem  $\mathbb{Q}$ . Z poprzedniego twierdzenia wynika istnieje bazy tej przestrzeni, jakkolwiek wskazanie jej elementów nie jest możliwe. Bazę tę nazywamy **bazą Hamela**.

**Twierdzenie 6.9.** Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $F$ , niech  $B \subset V$ . Następujące warunki są równoważne:

- (1)  $B$  jest bazą,
- (2)  $B$  jest generujący i dla każdego  $v \in V$  istnieje dokładnie jedna kombinacja liniowa taka, że

$$v = a_1v_1 + \dots + a_mv_m,$$

dla  $a_1, \dots, a_m \in F$  i  $v_1, \dots, v_m \in B$ .

*Dowód.* (1)  $\Rightarrow$  (2) : Ustalmy  $v \neq 0$  i przypuśćmy, że

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = a'_1 v'_1 + \dots + a'_n v'_n$$

dla  $v_1, \dots, v_m, v'_1, \dots, v'_n \in B$  oraz  $a_1, \dots, a_m, a'_1, \dots, a'_n \in F$ . Wówczas

$$\theta = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m - a'_1 v'_1 - \dots - a'_n v'_n$$

i ponieważ  $v \neq \theta$ , nie wszystkie  $a_i, a'_j$  są równe 0, skąd  $v_1, \dots, v_m, v'_1, \dots, v'_n$  są liniowo zależne. Jest to możliwe, jeśli  $n = m$  oraz  $v_i = v'_i$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1) : Przypuśćmy, że  $B$  jest liniowo zależny. Wówczas

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$$

dla pewnych  $v, v_1, \dots, v_m \in B$  oraz  $a_1, \dots, a_m \in F$ . Zatem  $v = 1 \cdot v$  oraz  $v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$  są dwiema kombinacjami liniowymi wektorów z  $B$  dających  $v$ .  $\square$

**Definicja 6.10.** Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $F$ , niech  $B \subset V$ . Dla  $v \in V$  jednoznacznie wyznaczone skalary  $a_1, \dots, a_m \in F$  takie, że dla pewnych  $v_1, \dots, v_m \in B$ :

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$$

nazywamy **współrzędnymi** wektora  $v$  w bazie  $B$ .

**Przykłady:**

(6) Rozważmy przestrzeń  $\mathbb{R}^3$ . Ponieważ

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

więc wektor  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  ma w bazie  $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$  współrzędne  $(1, 2, 3)$ .

(7) Rozważmy przestrzeń  $\mathbb{R}^3$ . Ponieważ

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

więc wektor  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  ma w bazie  $\left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$  współrzędne  $(2, 1, 0)$ .

**Lemat 6.11.** Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $F$ , niech  $v, v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n \in V$ . Jeżeli  $v \in \text{lin}(v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n)$  oraz  $v \notin \text{lin}(w_1, \dots, w_n)$ , to dla pewnego  $i \in \{1, \dots, m\}$ :

$$v_i \in \text{lin}(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n).$$

*Dowód.* Załóżmy, że  $v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m + b_1 w_1 + \dots + b_n w_n$ , dla pewnych  $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in F$ . Zauważmy, że istnieje  $a_i \neq 0$  dla pewnego  $i \in \{1, \dots, m\}$ : gdyby  $a_1 = \dots = a_m = 0$ , to wówczas  $v = b_1 w_1 + \dots + b_n w_n \in \text{lin}(w_1, \dots, w_n)$ . Wobec tego:

$$v_i = -\frac{a_1}{a_i} v_1 - \dots - \frac{a_{i-1}}{a_i} v_{i-1} + \frac{1}{a_i} v - \frac{a_{i+1}}{a_i} v_{i+1} - \dots - \frac{a_m}{a_i} v_m - \frac{b_1}{a_i} w_1 - \dots - \frac{b_n}{a_i} w_n.$$

$\square$

**Twierdzenie 6.12** (Lemat Steinitza<sup>2</sup> o wymianie). *Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $F$ , niech  $v, v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n \in V$ . Załóżmy, że  $V = \text{lin}(v_1, \dots, v_m)$  oraz że  $w_1, \dots, w_n$  są liniowo niezależne. Wówczas:*

- (1)  $n \leq m$ ,
- (2) istnieją  $i_1, i_2, \dots, i_{m-n}$  takie, że

$$V = \text{lin}(w_1, \dots, w_n, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n}})$$

*Dowód.* Dowód prowadzimy indukcyjnie względem  $n$ . Dla  $n = 0$  nie ma czego dowodzić. Załóżmy, że jeśli  $w_1, \dots, w_n$  są liniowo niezależne, to  $n \leq m$  oraz istnieją  $i_1, \dots, i_{m-n}$  takie, że  $V = \text{lin}(w_1, \dots, w_n, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n}})$ . Niech  $w_1, \dots, w_{n+1}$  będą liniowo niezależne. Jeśli  $n < m$ , to  $n + 1 \leq m$ . Jeśli  $n = m$ , to wobec założenia indukcyjnego  $V = \text{lin}(w_1, \dots, w_n)$  i stąd  $w_{n+1} \in \text{lin}(w_1, \dots, w_n)$ , a więc  $w_1, \dots, w_n, w_{n+1}$  nie mogą być liniowo niezależne.

Pozostaje wykazać część (2) twierdzenia. Wobec założenia indukcyjnego:

$$w_{n+1} \in V = \text{lin}(w_1, \dots, w_n, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n}}).$$

Ponadto  $w_{n+1} \notin \text{lin}(w_1, \dots, w_n)$ . Wobec Lematu 6.11, po ewentualnej zmianie notacji

$$v_{i_{m-n}} \in \text{lin}(w_1, \dots, w_n, w_{n+1}, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n-1}}).$$

Zauważmy, że ponieważ każdy z wektorów  $w_1, \dots, w_n, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n}}$  jest kombinacją liniową wektorów  $w_1, \dots, w_n, w_{n+1}, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n-1}}$  oraz ponieważ  $V = \text{lin}(w_1, \dots, w_n, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n}})$ , więc w konsekwencji

$$V = \text{lin}(w_1, \dots, w_n, w_{n+1}, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n-1}}).$$

□

**Wniosek 6.13.** *Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $F$ . Jeżeli  $n$ -elementowy układ jest bazą przestrzeni  $V$ , to każda baza tej przestrzeni składa się z dokładnie  $n$  wektorów.*

*Dowód.* Niech  $(w_1, \dots, w_n)$  i  $(v_1, \dots, v_m)$  będą bazami. Wówczas układ  $(v_1, \dots, v_m)$  jest liniowo niezależny, a  $(w_1, \dots, w_n)$  generujący, więc z lematu Steinitza  $m \leq n$ . Przez symetrię  $n \leq m$ . □

**Definicja 6.14.** *Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $F$ . Liczbę elementów dowolnej skończonej bazy przestrzeni  $V$  nazywamy **wymiarem** i oznaczamy  $\dim V$ . Jeżeli nie istnieje skończona baza danej przestrzeni, przyjmujemy  $\dim V = \infty$ .*

**Twierdzenie 6.15.** *Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $F$ , niech  $\dim V = n$ . Wówczas jeżeli  $U < V$ , to  $\dim U \leq n$ .*

*Dowód.* Wobec lematu Steinitza każdy liniowo niezależny podzbiór  $V$  ma co najwyżej  $n$  elementów. Ponadto każdy liniowo niezależny podzbiór  $U$  jest liniowo niezależnym podzbiorem  $V$ , a więc ma co najwyżej  $n$  elementów. W szczególności baza  $U$  ma co najwyżej  $n$  elementów, a więc  $\dim U \leq n$ . □

**Wniosek 6.16.** *Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $F$ , niech  $\dim V = n$ . Niech  $U < V$ . Następujące warunki są równoważne:*

- (1)  $U = V$ ,
- (2)  $\dim U = n$ .

<sup>2</sup>Ernst Steinitz (1871-1928) urodzony w Laurahütte, dziś część Siemianowic Śląskich.

*Dowód.* (1)  $\Rightarrow$  (2) : Jeżeli  $U = V$ , to oczywiście  $\dim U = n$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1) : Załóżmy, że  $(v_1, \dots, v_n)$  jest bazą  $U$ . Bazę tę można uzupełnić do bazy  $V$ . Ale baza  $V$  będzie miała  $n$  elementów, a zatem  $(v_1, \dots, v_n)$  jest bazą  $V$ .  $\square$

**Definicja 6.17.** Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $F$ , niech  $v_1, \dots, v_n \in V$ , niech  $a_1, \dots, a_n \in F$ . Równość postaci

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = \theta$$

nazywamy **zależnością** między  $v_1, \dots, v_n$ . Ciągi współczynników  $(a_1, \dots, a_n)$  odpowiadających wszystkim zależnościom między  $v_1, \dots, v_n$  tworzą podzbiór przestrzeni  $F^n$  oznaczany przez  $\mathcal{Z}(v_1, \dots, v_n)$  i nazywany **zbiorem zależności** między  $v_1, \dots, v_n$ .

**Twierdzenie 6.18.** Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $F$ , niech  $v_1, \dots, v_n \in V$ . Wówczas zbiór zależności  $\mathcal{Z}(v_1, \dots, v_n)$  jest podprzestrzenią przestrzeni  $F^n$  oraz

$$\dim \mathcal{Z}(v_1, \dots, v_n) = n - \dim \text{lin}(v_1, \dots, v_n).$$

*Dowód.* Sprawdzenie, że  $\mathcal{Z}(v_1, \dots, v_n)$  jest podprzestrzenią pozostawiamy Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie. Niech  $r = \dim \text{lin}(v_1, \dots, v_n)$ . Wówczas każdy maksymalny liniowo niezależny podzbiór zbioru  $\{v_1, \dots, v_n\}$  składa się z  $r$  elementów. Możemy założyć, że  $v_1, \dots, v_r$  są liniowo niezależne. Wówczas

$$v_{r+i} = a_{i1} v_1 + \dots + a_{ir} v_r$$

dla pewnych  $a_{i1}, \dots, a_{ir} \in F$ ,  $i \in \{1, \dots, n-r\}$ . Pokażemy, że

$$\begin{aligned} & (a_{11}, \dots, a_{1r}, -1, 0, \dots, 0), \\ & (a_{21}, \dots, a_{2r}, 0, -1, \dots, 0), \\ & \vdots \\ & (a_{n-r,1}, \dots, a_{n-r,r}, 0, 0, \dots, -1) \end{aligned}$$

tworzą bazę przestrzeni  $\mathcal{Z}(v_1, \dots, v_n)$ . Ponieważ

$$a_{i1} v_1 + \dots + a_{ir} v_r - v_{r+i} = \theta$$

więc  $(a_{i1}, \dots, a_{ir}, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0) \in \mathcal{Z}(v_1, \dots, v_n)$ . Załóżmy, że

$$\begin{aligned} (0, \dots, 0) &= x_1 (a_{11}, \dots, a_{1r}, -1, 0, \dots, 0) \\ &+ x_2 (a_{21}, \dots, a_{2r}, 0, -1, \dots, 0) \\ &\vdots \\ &+ x_{n-r} (a_{n-r,1}, \dots, a_{n-r,r}, 0, 0, \dots, -1). \end{aligned}$$

W szczególności dla współrzędnej  $n-r+i$ :

$$-x_i = 0,$$

a więc  $x_1 = \dots = x_{n-r} = 0$  i wektory są liniowo niezależne. Ustalmy  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{Z}(v_1, \dots, v_n)$ . Wówczas

$$\begin{aligned} & (a_1, \dots, a_n) + a_1(a_{11}, \dots, a_{1r}, -1, 0, \dots, 0) \\ & + a_2(a_{21}, \dots, a_{2r}, 0, -1, \dots, 0) \\ & \quad \vdots \\ & + a_n(a_{n-r,1}, \dots, a_{n-r,r}, 0, 0, \dots, -1) \\ & = (a_1 + a_1a_{11} + \dots + a_na_{n-r,1}, \dots, (a_r + a_1a_{1r} + \dots + a_na_{n-r,r}), 0, \dots, 0) \\ & \in \mathcal{Z}(v_1, \dots, v_n), \end{aligned}$$

a zatem

$$(a_1 + a_1a_{11} + \dots + a_na_{n-r,1})v_1 + \dots + (a_r + a_1a_{1r} + \dots + a_na_{n-r,r})v_r = \theta.$$

Ponieważ  $v_1, \dots, v_r$  są liniowo niezależne, więc

$$a_1 + a_1a_{11} + \dots + a_na_{n-r,1} = \dots = a_r + a_1a_{1r} + \dots + a_na_{n-r,r} = 0$$

i tym samym

$$\begin{aligned} (a_1, \dots, a_n) &= -a_1(a_{11}, \dots, a_{1r}, -1, 0, \dots, 0) \\ &\quad - a_2(a_{21}, \dots, a_{2r}, 0, -1, \dots, 0) \\ &\quad \quad \quad \vdots \\ &\quad - a_n(a_{n-r,1}, \dots, a_{n-r,r}, 0, 0, \dots, -1). \end{aligned}$$

□

**Twierdzenie 6.19.** Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $F$ , niech  $U_1, U_2 < V$ ,  $\dim U_1 < \infty$ ,  $\dim U_2 < \infty$ . Wówczas  $\dim(U_1 \cap U_2) < \infty$ ,  $\dim(U_1 + U_2) < \infty$  oraz

$$\dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2.$$

*Dowód.* Ponieważ  $U_1 \cap U_2 \subset U_1$  oraz  $\dim U_1 < \infty$ , więc  $\dim(U_1 \cap U_2) < \infty$ . Niech  $(v_1, \dots, v_k)$  będzie bazą  $U_1 \cap U_2$ . Możemy uzupełnić ją do bazy  $(v_1, \dots, v_k, \dots, v_n)$  podprzestrzeni  $U_1$  i do bazy  $(v_1, \dots, v_k, \dots, w_m)$  podprzestrzeni  $U_2$ . Oczywiście  $\text{lin}(v_1, \dots, v_k, \dots, v_n, \dots, w_m) = U_1 + U_2$ . Pokażemy, że wektory  $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n, w_{k+1}, \dots, w_m)$  są liniowo niezależne.

Założmy, że  $a_1v_1 + \dots + a_nv_n + b_{k+1}w_{k+1} + \dots + b_mw_m = \theta$  dla pewnych  $a_1, \dots, a_n, b_{k+1}, \dots, b_m \in F$ . Wówczas

$$a_1v_1 + \dots + a_nv_n = -b_{k+1}w_{k+1} - \dots - b_mw_m \in U_2,$$

a więc  $a_1v_1 + \dots + a_nv_n \in U_1 \cap U_2$ . Tym samym  $a_{k+1} = \dots = a_n = 0$ , a więc  $a_1v_1 + \dots + a_kv_k + b_{k+1}w_{k+1} + \dots + b_mw_m = \theta$  i skoro  $(v_1, \dots, v_k, \dots, w_m)$  są liniowo niezależne, więc również  $a_1 = \dots = a_k = b_{k+1} = \dots = b_m = 0$ . □

**Wniosek 6.20.** Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $F$ , niech  $\dim V < \infty$ , niech  $U_1, U_2 < V$ . Wówczas

$$\dim(U_1 \cap U_2) \geq \dim U_1 + \dim U_2 - n$$

gdzie  $\dim V = n$ .

*Dowód.* Wystarczy zauważyć, że  $\dim(U_1 + U_2) \leq n$ . □

**Definicja 6.21.** Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $F$ , niech  $\dim V < \infty$ . **Hiperpłaszczyzną** nazywamy każdą podprzestrzeń przestrzeni  $V$  o wymiarze  $n - 1$ .

**Twierdzenie 6.22.** *Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $F$ , niech  $\dim V = n$ . Niech  $U < V$  i niech  $\dim U = k$ . Wówczas  $U$  jest częścią wspólną  $n - k$  hiperpłaszczyzn.*

*Dowód.* Niech  $(v_1, \dots, v_k)$  będzie bazą  $U$ . Możemy uzupełnić ją do bazy  $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$  przestrzeni  $V$ . Niech  $W_i = \text{lin}(v_1, \dots, v_{k+i-1}, v_{k+i+1}, \dots, v_n)$ ,  $i \in \{1, \dots, n - k\}$ . Pokażemy, że  $U = W_1 \cap \dots \cap W_{n-k}$ .

Oczywiście  $U = \text{lin}(v_1, \dots, v_k) \subset W_1 \cap \dots \cap W_{n-k}$ . Ustalmy  $v \in W_1 \cap \dots \cap W_{n-k}$ . Niech  $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$  dla pewnych  $a_1, \dots, a_n \in F$ . Ustalmy  $i \in \{1, \dots, n - k\}$ . Wówczas  $v \in W_i$ , a więc  $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \in W_i$ . Tym samym  $a_{k+i} = 0$ .  $\square$

**Twierdzenie 6.23.** *Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $F$ , niech  $\dim V = n$ . Niech  $W_1, \dots, W_l$  będą hiperpłaszczyznami. Wówczas*

$$\dim(W_1 \cap \dots \cap W_l) \geq n - l.$$

*Dowód.* Dla  $l = 1$  nie ma czego dowodzić. Załóżmy, że  $l > 1$  i że dla  $l$  hiperpłaszczyzn rezultat jest prawdziwy. Niech  $W_1, \dots, W_{l+1}$  będą hiperpłaszczyznami. Wówczas  $\dim(W_1 \cap \dots \cap W_l) \geq n - l$ . Wobec Wniosku 6.20  $\dim(W_1 \cap \dots \cap W_l \cap W_{l+1}) \geq \dim(W_1 \cap \dots \cap W_l) + n - 1 - n \geq n - l - 1 = n - (l + 1)$ .  $\square$

**Wniosek 6.24.** *Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $F$ , niech  $\dim V = n$ . Niech  $U < V$  i niech  $\dim U = k$ . Wówczas  $U$  jest częścią wspólną  $n - k$ , ale nie mniejszej liczby hiperpłaszczyzn.*