

## 5. WYKŁAD 5.

## 5.1. Przestrzenie liniowe i podprzestrzenie.

**Definicja 5.1.** Niech  $F$  będzie ciałem. Algebrę  $(V, F, +, \cdot)$ , gdzie  $V \neq \emptyset$ ,  $+$  jest działaniem w zbiorze  $V$  zwanym **dotawaniem wektorów**, a  $\cdot$  jest działaniem zewnętrznym ciała  $F$  na  $V$  zwanym **mnożeniem przez skalar** nazywamy **przestrzenią liniową** (lub **wektorową**), jeżeli:

- (1)  $\forall v, w, u \in V [v + (u + w) = (v + u) + w]$ ,
- (2)  $\forall v, w \in V [v + w = w + v]$ ,
- (3)  $\forall v \in V \exists w \in W [v + w = \theta]$ , gdzie  $\theta$  jest pewnym ustalonym elementem  $V$ ,
- (4)  $\forall v \in V [v + \theta = \theta + v = v]$ ,
- (5)  $\forall a, b \in F \forall v \in V [(a + b)v = av + bv]$ ,
- (6)  $\forall a \in F \forall v, w \in V [a(v + w) = av + aw]$ ,
- (7)  $\forall a, b \in F \forall v \in V [a(bv) = (ab)v]$ ,
- (8)  $\forall v \in V [1 \cdot v = v]$ .

Elementy zbioru  $V$  tradycyjnie nazywamy **wektorami**.

**Przykłady:**

- (1) Niech  $E$  będzie płaszczyzną euklidesową, niech  $P \in E$  będzie ustalonym punktem niech

$$S_P(E) = \{\overrightarrow{PQ} : Q \in E\}$$

będzie zbiorem wektorów zaczepionych w punkcie  $P$ . Wówczas  $(S_P(E), \mathbb{R}, +, \cdot)$  jest przestrzenią liniową, gdzie  $+$  jest działaniem dodawania wektorów na płaszczyźnie zgodnie z regułą równoległoboku, a  $\cdot$  jest działaniem mnożenia wektorów przez skalary rzeczywiste.

- (2) Szczególnym przypadkiem powyższej konstrukcji jest przestrzeń  $(S_{(0,0)}(E), \mathbb{R}, +, \cdot)$  wektorów zaczepionych w początku układu współrzędnych  $(0, 0)$ .
- (3) Uogólnieniem poprzedniego przykładu jest **przestrzeń współrzędnych**. Niech  $F$  będzie dowolnym ciałem, niech  $n \in \mathbb{N}$ , niech

$$F^n = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} : a_1, \dots, a_n \in F \right\}.$$

Wówczas  $(F^n, F, +, \cdot)$  jest przestrzenią liniową, gdzie  $+$  oraz  $\cdot$  są działaniami zdefiniowanymi wzorami:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad a \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa_1 \\ \vdots \\ aa_n \end{bmatrix}.$$

- (4) Wektory przestrzeni współrzędnych wygodnie jest czasem zapisywać poziomo zamiast pionowo. Niech  $F$  będzie dowolnym ciałem, niech  $n \in \mathbb{N}$ , niech

$$F_n = \{[a_1, \dots, a_n] : a_1, \dots, a_n \in F\}.$$

Wówczas  $(F_n, F, +, \cdot)$  jest przestrzenią liniową, gdzie  $+$  oraz  $\cdot$  są działaniami zdefiniowanymi wzorami:

$$[a_1, \dots, a_n] + [b_1, \dots, b_n] = [a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n]$$

oraz

$$a[a_1, \dots, a_n] = [aa_1, \dots, aa_n].$$

- (5) Niech  $F$  będzie dowolnym ciałem. Wówczas  $(M_n^m(F), F, +, \cdot)$  jest przestrzenią liniową, gdzie  $+$  oraz  $\cdot$  są działaniami dodawania macierzy i mnożenia macierzy przez skalar.
- (6) Niech  $F$  będzie dowolnym ciałem, niech

$$F^\infty = \{(a_1, a_2, \dots) : a_i \in F, \text{ dla } i \in \mathbb{N}\}$$

będzie zbiorem ciągów elementów ciała  $F$ . Wówczas  $(F^\infty, F, +, \cdot)$  jest przestrzenią liniową, gdzie  $+$  oraz  $\cdot$  są działaniami zdefiniowanymi wzorami:

$$(a_1, a_2, \dots) + (b_1, b_2, \dots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$$

oraz

$$a(a_1, a_2, \dots) = (aa_1, aa_2, \dots).$$

- (7) Niech  $F$  będzie dowolnym ciałem, niech

$$F^{(\infty)} = \{(a_1, a_2, \dots) : a_i \in F, \text{ dla } i \in \mathbb{N}, a_i = 0 \text{ dla prawie wszystkich } i \in \mathbb{N}\}$$

będzie zbiorem ciągów elementów ciała  $F$  o skończonej liczbie niezerowych wyrazów. Wówczas  $(F^{(\infty)}, F, +, \cdot)$  jest przestrzenią liniową, gdzie  $+$  oraz  $\cdot$  są działaniami zdefiniowanymi jak w poprzednim przykładzie.

- (8) Niech  $F$  będzie dowolnym ciałem, niech  $A \neq \emptyset$  będzie niepustym zbiorem, niech

$$F^A = \{f : A \rightarrow F : f \text{ jest funkcją}\}$$

będzie zbiorem wszystkich funkcji ze zbioru  $A$  w ciało  $F$ . Wówczas  $(F^A, F, +, \cdot)$  jest przestrzenią liniową, gdzie  $+$  i  $\cdot$  są działaniami zdefiniowanymi następująco:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \text{ dla } x \in A,$$

oraz

$$(a \cdot f)(x) = af(x), \text{ dla } x \in A.$$

- (9) Szczególnym przypadkiem poprzedniego przykładu jest sytuacja, w której zbiór  $A = \{x\}$  jest jednoelementowy. Zbiór  $F^A$  oznaczamy wówczas  $F^x$  i przestrzeń  $(F^x, F, +, \cdot)$  definiujemy przez działania jak w poprzednim przykładzie.
- (10) Niech  $I \subset \mathbb{R}$  będzie przedziałem na prostej rzeczywistej, niech

$$C_n(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : f^{(n)} \text{ jest ciągła}\}$$

będzie zbiorem wszystkich funkcji rzeczywistych na przedziale  $I$ , których  $n$ -ta pochodna jest ciągła. Wówczas  $(C_n(I), \mathbb{R}, +, \cdot)$  jest przestrzenią liniową, gdzie działania  $+$  i  $\cdot$  definiujemy jak w poprzednich dwóch przykładach.

- (11) Niech  $F$  będzie dowolnym ciałem. Wówczas  $(F[x], F, +, \cdot)$  jest przestrzenią liniową, gdzie  $+$  i  $\cdot$  są działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianu przez skalar.
- (12) Niech  $F$  będzie dowolnym ciałem, niech  $n \in \mathbb{N}$  i niech

$$F[x]_n = \{f \in F[x] : \deg f \leq n\}$$

będzie zbiorem wielomianów stopnia co najwyżej  $n$ . Wówczas  $(F[x]_n, F, +, \cdot)$  jest przestrzenią liniową, gdzie  $+$  i  $\cdot$  są działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianu przez skalar.

- (13) Niech  $F$  będzie dowolnym ciałem. Wówczas  $(F[x_1, \dots, x_n], F, +, \cdot)$  jest przestrzenią liniową, gdzie  $+$  i  $\cdot$  są działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianu przez skalar.

(14) Niech  $F$  będzie dowolnym ciałem, niech  $m \in \mathbb{N}$  i niech

$$F[x_1, \dots, x_n]_m = \{f \in F[x_1, \dots, x_n] : \deg f \leq m\}$$

będzie zbiorem wielomianów stopnia co najwyżej  $m$ . Wówczas  $(F[x_1, \dots, x_n]_m, F, +, \cdot)$  jest przestrzenią liniową, gdzie  $+$  i  $\cdot$  są działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianu przez skalar.

- (15) Rozważmy ciała  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ . Wówczas  $(\mathbb{R}, \mathbb{Q}, +, \cdot)$  jest przestrzenią liniową, gdzie  $+$  i  $\cdot$  są działaniami dodawania liczb rzeczywistych i mnożenia liczb rzeczywistych przez liczby wymierne. Podobnie  $(\mathbb{C}, \mathbb{Q}, +, \cdot)$  i  $(\mathbb{C}, \mathbb{R}, +, \cdot)$  są przestrzeniami liniowymi.
- (16) Powyższy przykład można uogólnić jak następuje: niech  $F$  i  $E$  będą dowolnymi ciałami, przy czym  $F \subset E$ . Wówczas  $(E, F, +, \cdot)$  jest przestrzenią liniową, gdzie  $+$  i  $\cdot$  są działaniami dodawania w ciele  $E$  i mnożenia elementów ciała  $E$  przez elementy podciała  $F$ .
- (17) Szczególny przypadek poprzedniego przykładu zachodzi, gdy  $E = F$ . Wówczas  $(F, F, +, \cdot)$  jest przestrzenią liniową ciała  $F$  nad samym sobą.
- (18) Niech  $(V_i, F, +_i, \cdot_i)$ , dla  $i \in \{1, \dots, n\}$ , będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem  $F$ . Wówczas  $(V_1 \times \dots \times V_n, F, +, \cdot)$  jest przestrzenią liniową gdzie  $+$  i  $\cdot$  są działaniami zdefiniowanymi następująco:

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) + (w_1, w_2, \dots, w_n) = (v_1 +_1 w_1, v_2 +_2 w_2, \dots, v_n +_n w_n)$$

oraz

$$a \cdot (v_1, v_2, \dots, v_n) = (a \cdot_1 v_1, a \cdot_2 v_2, \dots, a \cdot_n v_n).$$

**Twierdzenie 5.2.** Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $F$ . Wówczas:

- (1)  $\forall v, w, u \in V [v + w = v + u \Rightarrow w = u]$ ,
- (2)  $\forall v, w \in V [v = -w \Rightarrow v + w = 0]$ ,
- (3)  $\forall v, w \in V [v - w = v + (-w)]$ ,
- (4)  $\forall a \in F \forall v \in V [av = \theta \Rightarrow a = 0 \vee v = 0]$ ,
- (5)  $\forall a \in F [a \cdot \theta = \theta]$ ,
- (6)  $\forall v \in V [0 \cdot v = \theta]$ ,
- (7)  $\forall v \in V [-v = (-1)v]$ ,
- (8)  $\forall v, w, u \in V [v - (w + u) = (v - w) - u]$ ,
- (9)  $\forall v, w, u \in V [v - (w - u) = (v - w) + u]$ ,
- (10)  $\forall v, w \in V [-(v + w) = (-v) + (-w)]$ ,
- (11)  $\forall v, w \in V [-(v - w) = (-v) + w]$ ,
- (12)  $\forall v, w \in V \forall a \in F [a(v - w) = av - aw]$ ,
- (13)  $\forall v \in V \forall a, b \in F [(a - b)v = av - bv]$ ,
- (14)  $\forall v \in V \forall a \in F [a(-v) = (-a)v = -av]$ ,
- (15)  $\forall v \in V \forall a \in F [(-a)(-v) = av]$ .

Proste dowody powyższych własności pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie.

**Definicja 5.3.** Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $F$ . Podzbiór  $U$  przestrzeni  $V$  nazywamy **podprzestrzenią**, jeżeli:

- (1)  $\forall v, w \in U [v + w \in U]$ ,
- (2)  $\forall a \in F \forall v \in U [a \cdot v \in U]$ .

Podprzestrzeń oznaczamy symbolem  $U < V$ .

**Przykłady:**

(19) Niech  $F$  będzie dowolnym ciałem i rozważmy przestrzeń  $F^2$ , a w niej podzbiór

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 2a \end{bmatrix} : a \in F \right\}.$$

Wówczas zbiór ten jest podprzestrzenią; istotnie, dla dowolnych dwóch wektorów  $\begin{bmatrix} a \\ 2a \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} b \\ 2b \end{bmatrix}$  i dla dowolnego skalaru  $\lambda \in F$  zachodzi:

$$\begin{bmatrix} a \\ 2a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ 2a+2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+b) \\ 2(a+b) \end{bmatrix} \in U$$

oraz

$$\lambda \begin{bmatrix} a \\ 2a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda a) \\ 2(\lambda a) \end{bmatrix} \in U.$$

(20) Niech  $F$  będzie dowolnym ciałem i rozważmy przestrzeń  $F^2$ , a w niej podzbiór

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix} : a \in F \right\}.$$

Wówczas nie jest to podprzestrzeń; istotnie  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in U$  oraz  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in U$ , ale

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+1 \end{bmatrix} \notin U.$$

**Twierdzenie 5.4.** Niech  $F$  będzie ciałem, niech  $m, n \in \mathbb{N}$  i rozważmy jednorodny układ równań o współczynnikach z ciała  $F$ :

$$\mathcal{U} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Wówczas zbiór rozwiązań  $Sol(\mathcal{U})$  jest podprzestrzenią przestrzeni  $F^n$ .

*Dowód.* Niech  $x_1, \dots, x_n$  oraz  $y_1, \dots, y_n$  będą rozwiązaniami układu  $\mathcal{U}$ , niech  $a \in F$ . Oczywiście rozwią-

zania te możemy interpretować jako wektory  $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  i  $\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$  przestrzeni  $F^n$ . Pokażemy, że

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \in Sol(\mathcal{U}).$$

Istotnie, wystarczy pokazać, że  $x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n$  jest rozwiązaniem układu  $\mathcal{U}$ . Ustalmy  $i \in \{1, \dots, m\}$ .

Wówczas:

$$\begin{aligned} & a_{i1}(x_1 + y_1) + a_{i2}(x_2 + y_2) + \dots + a_{in}(x_n + y_n) \\ &= (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n) + (a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{in}y_n) \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Pozostaje sprawdzić, że  $a \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \text{Sol}(U)$ . Faktycznie, dla  $i \in \{1, \dots, m\}$ :

$$a_{i1}(ax_1) + a_{i2}(ax_2) + \dots + a_{in}(ax_n) = a(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n) = a0 = 0.$$

□

**Twierdzenie 5.5.** Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $F$ . Podzbiór  $U \subset V$  jest podprzestrzenią przestrzeni  $V$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $(U, F, +|_{U \times U}, \cdot|_{F \times U})$  jest przestrzenią liniową.

Prosty dowód pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie.

**Twierdzenie 5.6.** Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $F$ , niech  $\mathcal{W}$  będzie pewną rodziną podprzestrzeni przestrzeni  $V$ . Wówczas  $\bigcap \mathcal{W} < V$ .

*Dowód.* Ustalmy  $v, w \in \bigcap \mathcal{W}$  oraz  $a \in F$ . Pokażemy, że  $v + w \in \bigcap \mathcal{W}$ . Istotnie, jako że  $v, w \in \bigcap \mathcal{W}$ , więc  $v, w \in U$  dla wszystkich  $U \in \mathcal{W}$ , a stąd  $v + w \in U$ , dla wszystkich  $U \in \mathcal{W}$ . Ale to oznacza, że  $v + w \in \bigcap \mathcal{W}$ .

Analogicznie sprawdzamy, że  $av \in \bigcap \mathcal{W}$ .

□

**Definicja 5.7.** Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $F$ , a  $A \subset V$  pewnym zbiorem. Najmniejszą podprzestrzeń przestrzeni  $V$  zawierającą zbiór  $A$  nazywamy **podprzestrzenią generowaną przez  $A$**  i oznaczamy  $\text{lin}(A)$ . Każdy zbiór  $A$  o tej własności, że  $\text{lin}(A) = U$  nazywamy **zbiorem generatorów podprzestrzeni  $U$** . Jeśli  $A = \{v_1, \dots, v_m\}$ , to oznaczamy

$$\text{lin}(v_1, \dots, v_m) = \text{lin}(A).$$

Mówimy, że podprzestrzeń  $U$  jest **skończenie generowana**, gdy istnieją takie wektory  $v_1, \dots, v_m \in V$ , że

$$U = \text{lin}(v_1, \dots, v_m).$$

**Twierdzenie 5.8** (o postaci elementów podprzestrzeni generowanej przez zbiór). Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $F$  oraz niech  $A \subset V$ . Wówczas

$$\text{lin}(A) = \{a_1v_1 + \dots + a_mv_m : m \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_m \in F, v_1, \dots, v_m \in A\}.$$

*Dowód.* Oznaczmy

$$U = \{a_1v_1 + \dots + a_mv_m : m \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_m \in F, v_1, \dots, v_m \in A\}.$$

Pokażemy, że  $U < V$ . Istotnie, jeśli  $a_1v_1 + \dots + a_mv_m, a'_1v'_1 + \dots + a'_mv'_m \in U$ , to wówczas  $a_1v_1 + \dots + a_mv_m + a'_1v'_1 + \dots + a'_mv'_m \in U$ . Podobnie dla  $a \in F$  mamy  $a(a_1v_1 + \dots + a_mv_m) = aa_1v_1 + \dots + aa_mv_m \in U$ .

Pokażemy, że  $U = \text{lin}(A)$ . Inkluzja ( $\supset$ ) jest oczywista, pozostaje wykazać ( $\subset$ ). Dowód prowadzimy przez indukcję względem  $m$ . Dla  $m = 1$  niech  $v_1 \in A$ . Wówczas  $a_1v_1$  należy do każdej podprzestrzeni zawierającej  $v_1$ , w szczególności do  $\text{lin}(A)$ . Dla  $m > 1$  ustalmy  $v_1, \dots, v_m \in A$  oraz  $a_1, \dots, a_m \in F$  i załóżmy, że

$$a_1v_1 + \dots + a_mv_m \in \text{lin}(A).$$

Ustalmy  $a_{m+1} \in F$  oraz  $v_{m+1} \in A$ . Wówczas

$$\underbrace{a_1v_1 + \dots + a_mv_m}_{\in \text{lin}(A)} + a_{m+1} \underbrace{v_{m+1}}_{\in \text{lin}(A)} \in \text{lin}(A).$$

□

**Definicja 5.9.** Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $F$ , niech  $v_1, \dots, v_m \in V$ , niech  $a_1, \dots, a_m \in F$ . Wektor

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$$

nazywamy **kombinacją liniową** wektorów  $v_1, \dots, v_m$ .

**Przykłady:**

(21) Rozważmy przestrzeń  $\mathbb{R}^3$ . Wektor

$$1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

jest kombinacją liniową wektorów  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

**Definicja 5.10.** Niech  $(V, F, +_V, \cdot_V)$  i  $(W, F, +_W, \cdot_W)$  będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem  $F$ . Funkcję  $f : V \rightarrow W$  nazywamy **izomorfizmem** przestrzeni liniowych, jeżeli jest bijekcją i spełnione są warunki:

- (1)  $\forall v, w \in V [f(v +_V w) = f(v) +_W f(w)]$ ,
- (2)  $\forall a \in F \forall v \in V [f(a \cdot_V v) = a \cdot_W f(v)]$ .

Jeżeli istnieje izomorfizm  $f : V \rightarrow W$ , to przestrzenie  $V$  i  $W$  nazywamy **izomorficznymi**, co oznaczamy przez  $V \cong W$ .

**Przykłady:**

(22) Niech  $F$  będzie dowolnym ciałem, niech  $n \in \mathbb{N}$ . Wówczas przestrzenie  $F^n$  oraz  $F_n$  są izomorficzne. Istotnie, rozważmy funkcję  $f : F^n \rightarrow F_n$  daną wzorem

$$f \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right) = [x_1, \dots, x_n].$$

Sprawdzenie, że funkcja ta jest bijekcją pozostawiamy czytelnikowi jako łatwe ćwiczenie. Ustalmy

$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in F^n$  oraz  $a \in F$ . Wówczas:

$$\begin{aligned} f \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right) &= f \left( \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \right) \\ &= [x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n] = [x_1, \dots, x_n] + [y_1, \dots, y_n] \\ &= f \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right) + f \left( \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

oraz

$$f\left(a \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ ax_n \end{bmatrix}\right) = [ax_1, \dots, ax_n] = a[x_1, \dots, x_n] = a\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right).$$

- (23) Niech  $F$  będzie dowolnym ciałem, niech  $m, n \in \mathbb{N}$ . Wówczas przestrzenie  $F_{nm}$  oraz  $M_m^n(F)$  są izomorficzne. Istotnie, podobnie jak wcześniej sprawdzamy, że odwzorowanie  $f : F_{nm} \rightarrow M_m^n(F)$  dane wzorem:

$$f([x_{11}, \dots, x_{1n}, x_{21}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{mn}]) = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

jest izomorfizmem przestrzeni liniowych.

- (24) Niech  $F$  będzie dowolnym ciałem, niech  $n \in \mathbb{N}$ . Wówczas przestrzenie  $F_{n+1}$  oraz  $F[x]_n$  są izomorficzne. Istotnie, podobnie jak wcześniej sprawdzamy, że odwzorowanie  $f : F_{n+1} \rightarrow F[x]_n$  dane wzorem:

$$f([a_0, a_1, \dots, a_n]) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

jest izomorfizmem przestrzeni liniowych.

**Twierdzenie 5.11.** *Izomorfizm przestrzeni liniowych jest relacją równoważności w klasie wszystkich przestrzeni liniowych.*

Prosty dowód pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie.

**Przykład:**

- (25) Niech  $F$  będzie dowolnym ciałem, niech  $n, m \in \mathbb{N}$ . Wówczas przestrzenie  $F^{nm}$  i  $M_m^n(F)$  są izomorficzne. Istotnie, poprzednio sprawdziliśmy, że  $F^{nm} \cong F_{nm}$  oraz  $F_{nm} \cong M_m^n(F)$ . Ponieważ relacja  $\cong$  jest równoważnością, a więc w szczególności jest przechodnia, również  $F^{nm} \cong M_m^n(F)$ . Podobnie możemy sprawdzić, że  $F^{n+1} \cong F[x]_n$ .

## 5.2. Liniowa niezależność. Warstwy i przestrzenie ilorazowe.

**Definicja 5.12.** *Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $F$ , niech  $A \subset V$ . Zbiór wektorów  $A$  nazywamy **liniowo niezależnym**, jeżeli*

$$\forall m \in \mathbb{N} \forall v_1, \dots, v_m \in A \forall a_1, \dots, a_m \in F [a_1v_1 + \dots + a_mv_m = \theta \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0].$$

*Jeżeli dany zbiór wektorów nie jest liniowo niezależny, to mówimy, że jest **liniowo zależny**.*

**Uwaga 5.13.** *Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $F$ , niech  $A = \{v_1, \dots, v_m\}$ . Wówczas zbiór  $A$  jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy:*

$$\forall a_1, \dots, a_m \in F [a_1v_1 + \dots + a_mv_m = \theta \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0].$$

**Przykłady:**

(1) Niech  $F$  będzie dowolnym ciałem i rozważmy przestrzeń  $F^3$ . Wówczas wektory  $\epsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,

$\epsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  i  $\epsilon_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  są liniowo niezależne. Istotnie, ustalmy  $a_1, a_2, a_3 \in F$  i załóżmy, że

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Oznacza to, że  $a_1, a_2, a_3$  jest rozwiązaniem układu:

$$\mathcal{U} : \begin{cases} 1a_1 + 0a_2 + 0a_3 = 0 \\ 0a_1 + 1a_2 + 0a_3 = 0 \\ 0a_1 + 0a_2 + 1a_3 = 0 \end{cases}.$$

Macierz współczynników lewych stron równań układu  $\mathcal{U}$  jest równa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

a jej wyznacznik  $\det(A) = 1 \neq 0$ , a zatem wobec wzorów Cramera układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ .

(2) Niech  $F$  będzie dowolnym ciałem i rozważmy przestrzeń  $F^3$ . Wówczas wektory  $\epsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,

$\epsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  i  $\epsilon_1 + \epsilon_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  są liniowo zależne. Istotnie:

$$1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**Twierdzenie 5.14.** Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $F$ , niech  $v_1, \dots, v_m \in V$ . Wektory  $v_1, \dots, v_m$  są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wektor  $v \in \{v_1, \dots, v_m\}$  będący kombinacją liniową pozostałych.

*Dowód.* ( $\Rightarrow$ ): Załóżmy, że  $v_1, \dots, v_m$  są liniowo zależne. Wówczas istnieją skalary  $a_1, \dots, a_m \in F$  takie, że

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = \theta,$$

z których przynajmniej jeden jest niezerowy. Powiedzmy, że  $a_1 \neq 0$ . Wobec tego:

$$v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2 - \dots - \frac{a_m}{a_1} v_m.$$

( $\Leftarrow$ ): Załóżmy, że jeden z wektorów, powiedzmy  $v_1$ , jest kombinacją liniową  $v_2, \dots, v_m$ :

$$v_1 = a_2 v_2 + \dots + a_m v_m.$$

Wówczas  $1 \cdot v_1 - a_2 v_2 - \dots - a_m v_m = \theta$  oraz  $1 \neq 0$ . □



**Twierdzenie 5.15.** Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $F$ , niech  $A \subset B \subset V$ . Wówczas:

- (1) jeśli  $A$  jest liniowo zależny, to  $B$  jest liniowo zależny;
- (2) jeśli  $B$  jest liniowo niezależny, to  $A$  jest liniowo niezależny;
- (3) jeśli  $A$  jest liniowo zależny, to istnieją wektory  $v_1, \dots, v_m \in A$ , które są liniowo zależne.

**Definicja 5.16.** Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $F$ , niech  $U < V$ . **Warstwą** wektora  $v \in V$  względem podprzestrzeni  $U$  nazywamy zbiór

$$v + U = \{v + w : w \in U\}.$$

Zbiór wszystkich warstw oznaczamy przez  $V/U$ .

**Przykład:**

- (3) Rozważmy ciało  $\mathbb{Z}_3$  i przestrzeń  $\mathbb{Z}_3^2$ . Sprawdzamy, że

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

jest podprzestrzenią przestrzeni  $\mathbb{Z}_3^2$ , zaś sama przestrzeń  $\mathbb{Z}_3^2$  składa się z następujących wektorów:

$$\mathbb{Z}_3^2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Warstwy podprzestrzeni  $U$  to:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + U &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = U \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + U = U$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + U = U$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + U = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = W_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + U = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = W_1$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + U = W_1$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + U = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} = W_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + U = W_2$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + U = W_2.$$

Zatem  $\mathbb{Z}_3^2/U = \{U, W_1, W_2\}$ .

**Twierdzenie 5.17.** Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $F$ , niech  $U < V$ . W zbiorze warstw  $V/U$  definiujemy dodawanie:

$$(v + U) + (w + U) = (v + w) + U$$

oraz mnożenie przez skalar  $a \in F$ :

$$a \cdot (v + U) = (a \cdot v) + U.$$

Wówczas  $(V/U, F, +, \cdot)$  jest przestrzenią liniową. Nazywamy ją **przestrzenią ilorazową**.

Prosty dowód pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie.

**Przykład:**

(4) Odwołując się do poprzedniego przykładu, rozważmy przestrzeń ilorazową  $\mathbb{Z}_3^2/U = \{U, W_1, W_2\}$ , gdzie

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

oraz

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Sprawdzamy, że, na przykład:

$$\begin{aligned} W_1 + W_2 &= \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + U \right) + \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + U \right) \\ &= \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right) + U = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + U = U. \end{aligned}$$

**Twierdzenie 5.18.** Niech  $F$  będzie ciałem, niech  $m, n \in \mathbb{N}$  i rozważmy układ równań o współczynnikach z ciała  $F$ :

$$\mathcal{U} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Niech ponadto  $\mathcal{U}_0$  będzie układem jednorodnym powstałym z  $\mathcal{U}$  przez zastąpienie prawych stron równań zerami:

$$\mathcal{U}_0 : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Wówczas zbiór rozwiązań  $Sol(\mathcal{U})$  jest warstwą podprzestrzeni rozwiązań układu jednorodnego  $U = Sol(\mathcal{U}_0)$  w przestrzeni  $F^n$ .

*Dowód.* Niech  $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  oraz  $\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$  będą rozwiązaniami układu  $\mathcal{U}$ . Pokażemy, że

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - y_1 \\ \vdots \\ x_n - y_n \end{bmatrix} \in U = Sol(\mathcal{U}_0).$$

Ustalmy  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Wówczas:

$$\begin{aligned} & a_{i1}(x_1 - y_1) + a_{i2}(x_2 - y_2) + \dots + a_{in}(x_n - y_n) \\ &= (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n) - (a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{in}y_n) \\ &= b_i - b_i = 0. \end{aligned}$$

Oznacza to, że  $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + U$ . Wobec dowolności  $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ , oznacza to, że  $Sol(\mathcal{U}) \subset \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + U$ .

Dla dowodu drugiej inkluzji ustalmy  $\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + z_1 \\ \vdots \\ y_n + z_n \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + U$ , gdzie  $\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \in U$ .

Ustalmy  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Wówczas:

$$\begin{aligned} & a_{i1}(y_1 + z_1) + a_{i2}(y_2 + z_2) + \dots + a_{in}(y_n + z_n) \\ &= (a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{in}y_n) + (a_{i1}z_1 + a_{i2}z_2 + \dots + a_{in}z_n) \\ &= b_i + 0 = b_i, \end{aligned}$$

a zatem  $\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \in Sol(\mathcal{U})$  i tym samym  $\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + U \subset Sol(\mathcal{U})$ . □