Struktura zbioru rozwiązań układu równań liniowych.

Definicja:

Niech F będzie ciałem, niech $\mathcal{U}_0$ będzie układem jednorodnym m równań liniowych o n niewiadomych i współczynnikach z ciała F. Niech U_0 będzie podprzestrzenią F^n rozwiązań układu $\mathcal{U}_0$. Każdą bazę U_0 będziemy nazywać **układem fundamentalnym** rozwiązań układu $\mathcal{U}_0$, a każde przedstawienie parametryczne U_0 **rozwiązaniem ogólnym układu $\mathcal{U}_0$.**
Niech $\mathcal{U}$ będzie układem m równań liniowych o n niewiadomych i współczynnikach z ciała F.
Niech W będzie warstwą podprzestrzeni przestrzeni F^n wyznaczoną przez rozwiązania układu $\mathcal{U}$.
Każde przedstawienie parametryczne W nazywamy **rozwiązaniem ogólnym układu $\mathcal{U}$.**

Twierdzenie:

Niech F będzie ciałem, niech $U < F^n$ będzie wyznaczona przez równanie $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$, dla pewnych $a_1, \ldots, a_n \in F$ nie wszystkich równych zeru.
Wówczas U jest hiperpłaszczyzną.

Dowód.

Załóżmy, że $a_1 \neq 0$.
Wówczas $\epsilon_1 \notin U$, a więc $\dim U \leq n - 1$.
Ponadto $\epsilon_2 - \frac{a_2}{a_1}\epsilon_1, \epsilon_3 - \frac{a_3}{a_1}\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n - \frac{a_n}{a_1}\epsilon_1 \in U$ i wszystkie te wektory są liniowo niezależne. $\square$

Wniosek:

Niech F będzie ciałem, niech $U < F^n$ będzie wyznaczona przez układ m równań jednorodnych o n niewiadomych.
Wówczas $\dim U \geq n - m$.

Twierdzenie:

Niech F będzie ciałem, niec $U < F^n$ będzie hiperpłaszczyzną. Wówczas U jest wyznaczona przez równanie $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$, dla pewnych $a_1, \ldots, a_n \in F$ nie wszystkich równych zeru.

Dowód:

Załóżmy, że $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ jest bazą podprzestrzeni U. Niech

$$\alpha_i = [a_{i1}, \ldots, a_{in}], \text{ dla } i \in \{1, \ldots, n-1\}.$$

Rozważmy układ równań

$$\mathcal{U}_0 : \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n-1,1}x_1 + \ldots + a_{n-1,n}x_n = 0 \end{cases}$$

i niech U_0 oznacza podprzestrzeń rozwiązań układu $\mathcal{U}_0$.

$\dim U_0 \geq n - (n-1) = 1$, niech zatem $\theta \neq [b_1, \ldots, b_n] \in U_0$.
Podprzestrzeń W wyznaczona przez równanie
$b_1 x_1 + \ldots + b_n x_n = 0$ jest hiperpłaszczyzną.
Ponadto, wobec określenia $[b_1, \ldots, b_n]$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in W$ i tym samym $U = lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \subset W$.
Ponieważ $\dim U = \dim W = n - 1$ oznacza to, że $U = W$.

Wniosek:

Niech F będzie ciałem, niech $U < F^n$ będzie podprzestrzenią k-wymiarową.
Wówczas U jest wyznaczona przez przez układ złożony z $n - k$, ale nie mniej, jednorodnych równań liniowych.

Twierdzenie:

Niech F będzie ciałem, niech $W_1, \ldots, W_k < F^n$ będą hiperpłaszczyznami.
Niech $l_i = 0$ będzie równaniem hiperpłaszczyzny W_i, $l_i \in F_h[x_1, \ldots, x_n]$, $i \in \{1, \ldots, k\}$.
Wówczas $\dim(W_1 \cap \ldots \cap W_k) = n - k$ wtedy i tylko wtedy, gdy formy liniowe $l_1, \ldots, l_k$ są liniowo niezależne.

Dowód:

Załóżmy, że formy $l_1, \ldots, l_k$ są liniowo zależne.
Jedna z tych form jest kombinacją liniową pozostałych – możemy założyć, że l_k jest kombinacją liniową form $l_1, \ldots, l_{k-1}$.
Wówczas układy

$$\begin{cases} l_1 = 0 \\ \vdots \\ l_k = 0 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} l_1 = 0 \\ \vdots \\ l_{k-1} = 0 \end{cases}$$

mają identyczne zbiory rozwiązań, a więc
$W_1 \cap \ldots \cap W_k = W_1 \cap \ldots \cap W_{k-1}$.
$\dim(W_1 \cap \ldots \cap W_{k-1}) \geq n - k - 1 = n - k + 1 > n - k$, więc
$\dim(W_1 \cap \ldots \cap W_k) > n - k$.
Udowodniliśmy zatem, że jeżeli $\dim(W_1 \cap \ldots \cap W_k) = n - k$, to formy $l_1, \ldots, l_k$ są liniowo niezależne.

Załóżmy, że formy $l_1, \ldots, l_k$ są liniowo niezależne.
Układ $(l_1, \ldots, l_k)$ uzupełniamy do bazy $(l_1, \ldots, l_k, \ldots, l_n)$ przestrzeni liniowej $F_h[x_1, \ldots, x_n]_1$ form liniowych n zmiennych.
Niech W_i będzie hiperpłaszczyzną wyznaczoną przez równanie $l_i = 0$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Pokażemy, że $W_1 \cap \ldots \cap W_n = \{\theta\}$.
Ponieważ $l_1, \ldots, l_n$ generują przestrzeń $F_h[x_1, \ldots, x_n]_1$, więc formy $x_1, \ldots, x_n$ są kombinacjami liniowymi form $l_1, \ldots, l_n$.
Tym samym każdy wektor będący rowiązaniem układu

$$\begin{cases} l_1 = 0 \\ \vdots \\ l_n = 0 \end{cases}$$

jest też rozwiązaniem układu $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$, a więc $W_1 \cap \ldots \cap W_n \subset \{\theta\}$ i tym samym $W_1 \cap \ldots \cap W_n = \{\theta\}$.

W szczególności $\dim(W_1 \cap \ldots \cap W_n) = 0$.
Ponieważ $\dim(W_{k+1} \cap \ldots \cap W_n) \geq n - (n-k) = k$, więc:

$$\begin{aligned} 0 &= \dim(W_1 \cap \ldots \cap W_n) \geq \dim[(W_1 \cap \ldots \cap W_k) \cap (W_{k+1} \cap \ldots \cap W_n) \\ &\geq \dim(W_1 \cap \ldots \cap W_k) + \dim(W_{k+1} \cap \ldots \cap W_n) - n \\ &\geq \dim(W_1 \cap \ldots \cap W_k) + k - n, \end{aligned}$$

czyli $\dim(W_1 \cap \ldots \cap W_k) \leq n - k$ i tym samym
$\dim(W_1 \cap \ldots \cap W_k) = n - k$.

Wniosek:

Niech F będzie ciałem, niech $l_1, \ldots, l_k \in F_h[x_1, \ldots, x_n]_1$, niech $U < F^n$ będzie podprzestrzenią wyznaczoną przez układ równań

$$\mathcal{U}_0 : \begin{cases} l_1 = 0 \\ \vdots \\ l_k = 0. \end{cases}$$

Wówczas $\dim U = n - \dim lin(l_1, \ldots, l_k)$

Dowód.

Niech $\dim lin(l_1, \ldots, l_k) = r$ i niech $l_{i_1}, \ldots, l_{i_r}$ będzie maksymalnym liniowo niezależnym podzbiorem $\{l_1, \ldots, l_n\}$.

Wówczas U jest wyznaczona przez układ

$$\begin{cases} l_{i_1} = 0 \\ \vdots \\ l_{i_r} = 0. \end{cases}$$

i $\dim U = n - r = n - \dim lin(l_1, \ldots, l_n)$. $\square$

Definicja:

Niech F będzie ciałem.
Niech $A = [a_{ij}] \in M_m^n(F)$.
Oznaczmy $\beta_i = \left[\begin{array}{ccc} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{array}\right]$, dla $i \in \{1, \dots, m\}$, tak aby

$$A = \left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_m \end{array}\right].$$

Oznaczmy ponadto:

$$\alpha_j = \left[\begin{array}{c} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{array}\right], \text{ dla } j \in \{1, \dots, n\},$$

tak aby $A = \left[\begin{array}{c|c|c} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{array}\right]$.
Liczbę $\dim lin(\beta_1, \dots, \beta_m)$ nazywamy **rzędem wierszowym** macierzy A, a liczbę $\dim lin(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ nazywamy **rzędem kolumnowym** macierzy A.

Twierdzenie:

Niech F będzie ciałem, niech $A = [a_{ij}] \in M_m^n(F)$.
Rząd kolumnowy macierzy A równy jest jej rzędowi wierszowemu.

Dowód:

Oznaczmy $\beta_i = \left[\begin{array}{ccc} a_{i1} & \ldots & a_{in} \end{array}\right]$, dla $i \in \{1, \ldots, m\}$, tak aby

$$A = \left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_m \end{array}\right]$$

oraz

$$\alpha_j = \left[\begin{array}{c} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{array}\right], \text{ dla } j \in \{1, \ldots, n\},$$

tak aby $A = \left[\begin{array}{c|c|c} \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \end{array}\right]$.

Podprzestrzeń $\mathcal{Z}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ przestrzeni F^n jest identyczna z podprzestrzenią rozwiązań układu

$$\mathcal{U} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Zatem:

$$\dim \mathcal{Z}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = n - \dim lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Ponadto:

$$\dim \mathcal{Z}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = n - \dim lin(l_1, \ldots, l_m),$$

gdzie $l_i = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \in F_h[x_1, \ldots, x_n]_1$, dla $i \in \{1, \ldots, m\}$.
Przekształcenie $\phi : F_h[x_1, \ldots, x_n]_1 \to F^n$ dane wzorem

$$\phi(c_1x_1 + \ldots + c_nx_n) = [c_1, \ldots, c_n]$$

jest izomorfizmem przestrzeni liniowych, a więc
$\dim lin(l_1, \ldots, l_m) = \dim lin(\beta_1, \ldots, \beta_m)$.

Reasumując:

$$\begin{aligned} n - \dim \mathit{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) &= \dim \mathcal{Z}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \\ &= n - \dim \mathit{lin}(l_1, \ldots, l_m) \\ &= n - \dim \mathit{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m), \end{aligned}$$

a więc $\dim \mathit{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \dim \mathit{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$.

Definicja:

Niech F będzie ciałem, niech $A = [a_{ij}] \in M_m^n(F)$.
Wspólną wartość rzędu kolumnowego i rzędu wierszowego macierzy A nazywamy **rzędem** macierzy A i oznaczamy $r(A)$.

Wniosek:

Niech F będzie ciałem, niech $A = [a_{ij}] \in M_m^n(F)$.
Wartość $r(A)$ nie ulegnie zmianie, jeżeli na kolumnach lub wierszach macierzy A wykonamy operacje elementarne typu 1, 2 lub 3.

Przykład:

1. Powyższy wniosek daje praktyczną metodę znajdowania rzędu macierzy: najpierw sprowadzamy przez operacje elementarne daną macierz do postaci trójkątnej, a następnie zliczamy niezerowe wiersze lub kolumny.
   Dla przykładu obliczymy rząd macierzy
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Mamy kolejno:

$$r(A) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}\right) \quad \begin{array}{l} \\ w_2 - 3w_1 \\ w_3 - 7w_1 \\ w_4 - w_1 \end{array}$$

$$= r\left(\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} & k_2 - k_1 & k_3 - 2k_1 & k_4 - k_1 \end{array} \end{array}\right) \quad w_2 : (-2)$$

$$= r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ w_3 + w_2 \\ \\ \end{array}$$

$$
\begin{array}{ll}
= r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\right) & \begin{array}{l} \\ \\ w_3 \downarrow \\ w_4 \uparrow \end{array} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad k_3 - k_2 \quad k_4 + k_2 &
\end{array}
$$

$$
= \qquad r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -12 & -6 \end{bmatrix}\right) \qquad \begin{array}{l} \\ \\ \\ w_4 + 12w_3 \end{array}
$$

$$
= r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}\right) = 4,
$$

gdyż wektory $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 30 \end{bmatrix}$ są liniowo niezależne.

Wniosek:

Niech F będzie ciałem, niech $A = [a_{ij}] \in M_m^n(F)$. Wówczas $r(A) = r(A^T)$.

Wniosek:

Niech F będzie ciałem, niech

$$\mathcal{U}_0 : \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

będzie układem m jednorodnych równań liniowych o współczynnikach z ciała F, niech

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

niech $U_0 < F^n$ będzie podprzestrzenią rozwiązań układu $\mathcal{U}_0$. Wówczas

$$\dim U_0 = n - r(A).$$

Wniosek (twierdzenie Kroneckera-Capelliego):

Niech F będzie ciałem, niech

$$\mathcal{U} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \text{oraz } \mathcal{U}_0 : \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

będą układami m równań liniowych o współczynnikach z ciała F i m jednorodnych równań liniowych o współczynnikach z ciała F otrzymanym z równań układu $\mathcal{U}$ przez zastąpienie prawych stron zerami, niech

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \text{ oraz } A_0 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

niech $U_0 < F^n$ będzie podprzestrzenią rozwiązań układu $\mathcal{U}_0$.

Wówczas układ $\mathcal{U}$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(A_0)$.
Ponadto jeśli układ $\mathcal{U}$ ma choć jedno rozwiązanie, to wówczas zbiór wszystkich rozwiązań jest warstwą podprzestrzeni U_0, przy czym $\dim U_0 = n - r(A)$.
W szczególności układ ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(A_0) = n$.

Dowód:

Wystarczy udowodnić, że układ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(A_0)$.
Oznaczmy

$$\alpha_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \text{ dla } j \in \{1, \ldots, n\}, \text{ oraz } \alpha_j = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

tak, aby $A = \left[\; \alpha_1 \; \middle| \; \ldots \; \middle| \; \alpha_n \; \middle| \; \beta \; \right]$.
Układ $\mathcal{U}$ możemy zapisać wektorowo jako

$$\mathcal{U}_w : x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n = \beta.$$

Elementy $a_1, \ldots, a_n \in F$ są rozwiązaniem układu $\mathcal{U}_w$

$$\Leftrightarrow$$

$a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n = \beta$

$$\Leftrightarrow$$

$\beta \in lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

$$\Leftrightarrow$$

$lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta)$

$$\Leftrightarrow$$

$\dim lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \dim lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta)$ (jako że $lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \subset lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta)$)

$$\Leftrightarrow$$

$r(A_0) = r(A)$.

Twierdzenie:

Niech F będzie ciałem, niech

$$\mathcal{U}: \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \text{oraz } \mathcal{U}_0: \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

niech ponadto

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \text{ oraz } A_0 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Wówczas układ $\mathcal{U}$ jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(A_0)$.

Dowód:

Wcześniej zauważyliśmy, że układ sprzeczny nie ma rozwiązań, a zatem, wobec twierdzenia Kroneckera-Capelliego, $r(A) \neq r(A_0)$.
Pozostaje sprawdzić, że jeśli układ jest niesprzeczny, to $r(A) = r(A_0)$.
Załóżmy, że $r(A) \neq r(A_0)$.

Niech $\beta_i = \left[\begin{array}{ccc} a_{i1} & \ldots & a_{in} \end{array} \right]$, dla $i \in \{1, \ldots, m\}$, i niech $\beta'_i = \left[\begin{array}{cccc} a_{i1} & \ldots & a_{in} & b_i \end{array} \right]$, dla $i \in \{1, \ldots, m\}$, tak aby

$$A_0 = \left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_m \end{array} \right] \text{ oraz } A = \left[\begin{array}{c} \beta'_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta'_m \end{array} \right].$$

Niech ponadto

$$\alpha_j = \left[\begin{array}{c} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{array} \right], \text{ dla } j \in \{1, \ldots, n\}, \text{ oraz } \beta = \left[\begin{array}{c} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{array} \right],$$

tak, aby $A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \alpha_1 & \ldots & \alpha_n & \beta \end{array} \right]$.

Wówczas:

$$\begin{aligned}\dim \mathit{lin}(\beta_1,\ldots,\beta_m) &= r(A_0) = \dim \mathit{lin}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\\ &\leq \dim \mathit{lin}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta)\\ &= r(A) = \dim \mathit{lin}(\beta'_1,\ldots,\beta'_m),\end{aligned}$$

a zatem $r(A_0) < r(A)$.

Istnieją zatem liczby naturalne $i_1, \ldots, i_s$ takie, że wektory $\beta'_{i_1}, \ldots, \beta'_{i_s}$ są liniowo niezależne, a wektory $\beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}$ są liniowo zależne.
Tym samym istnieją $a_1, \ldots, a_s \in F$ takie, że

$$a_1\beta'_{i_1} + \ldots + a_s\beta'_{i_s} \neq \theta \text{ oraz } a_1\beta_{i_1} + \ldots + a_s\beta_{i_s} = \theta.$$

Tym samym $a_1\beta'_{i_1} + \ldots + a_s\beta'_{i_s} = [0, 0, \ldots, 0, a]$, dla pewnego $a \neq 0$.
Wobec tego mnożąc i_j-te równanie układu $\mathcal{U}$ przez a_j, a następnie dodając stronami tak zmodyfikowane równania, otrzymujemy $0 = a$.