Sumy i sumy proste podprzestrzeni.

Uwaga:

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F, niech $U_1, \ldots, U_n < V$.

1. Zbiór
$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$$
jest podprzestrzenią przestrzeni V.
2. Zbiór
$$U_1 + \ldots + U_n = \{u_1 + \ldots + u_n : u_1 \in U_1, \ldots, u_n \in U_n\}$$
jest podprzestrzenią przestrzeni V.

Dowód:

Pokażemy część (1) uwagi, dowód części (2) przebiega analogicznie.
Ustalmy $u_1 + u_2, u_1' + u_2' \in U_1 + U_2$, gdzie $u_1, u_1' \in U_1$ oraz $u_2, u_2' \in U_2$.
Wówczas:

$$(u_1 + u_2) + (u_1' + u_2') = \underbrace{(u_1 + u_1')}_{\in U_1} + \underbrace{(u_2 + u_2')}_{\in U_2} \in U_1 + U_2.$$

Ponadto dla $a \in F$:

$$a(u_1 + u_2) = \underbrace{(au_1)}_{\in U_1} + \underbrace{(au_2)}_{\in U_2} \in U_1 + U_2$$

Definicja:

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F, niech $U_1, \dots, U_n < V$.
Podprzestrzeń $U_1 + U_2$ nazywamy **sumą podprzestrzeni** U_1 i U_2.
Ogólniej, odprzestrzeń $U_1 + \ldots + U_n$ nazywamy sumą podprzestrzeni $U_1, \dots, U_n$.

Przykład:

5. Rozważmy przestrzeń liniową V i jej podprzestrzenie $U = lin(u_1, \ldots, u_n)$ oraz $W = lin(w_1, \ldots, w_m)$. Wówczas:

$$\begin{aligned} v \in U + W \quad &\Leftrightarrow \quad v = u + w \text{ oraz } u \in U, w \in W \\ &\Leftrightarrow \quad v = u + w \text{ oraz } u = a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n, \\ & \quad w = b_1 w_1 + \ldots + b_m w_m, \\ & \quad \text{dla pewnych } a_1, \ldots, a_n \in F, b_1, \ldots, b_m \in F \\ &\Leftrightarrow \quad v = a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n + b_1 w_1 + \ldots + b_m w_m, \\ & \quad \text{dla pewnych } a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in F \\ &\Leftrightarrow \quad v \in lin(u_1, \ldots, u_n, w_1, \ldots, w_m). \end{aligned}$$

A zatem
$lin(u_1, \ldots, u_n) + lin(w_1, \ldots, w_m) = lin(u_1, \ldots, u_n, w_1, \ldots, w_m)$.

Uwaga:

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F, niech $U_1, \ldots, U_n < V$.

1. Następujące dwa warunki są równoważne:
   (a) $U_1 \cap U_2 = \{\theta\}$,
   (b) jeśli $u_1 + u_2 = u_1' + u_2'$, gdzie $u_1, u_1' \in U_1$, $u_2, u_2' \in U_2$, to $u_1 = u_1'$ oraz $u_2 = u_2'$.
2. Następujące dwa warunki są równoważne:
   (a) $U_i \cap (U_1 + \ldots + U_{i-1} + U_{i+1} + \ldots + U_n) = \{\theta\}$, dla $i \in \{1, \ldots, n\}$,
   (b) jeśli $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_1' + u_2' + \ldots + u_n'$, gdzie $u_i, u_i' \in U_i$, dla $i \in \{1, \ldots, n\}$, to $u_i = u_i'$, dla $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Dowód:

Pokażemy część (1) uwagi, dowód części (2) przebiega analogicznie.
Załóżmy, że $U_1 \cap U_2 = \{\theta\}$ i niech $u_1 + u_2 = u_1' + u_2'$, dla pewnych $u_1, u_1' \in U_1$, $u_2, u_2' \in U_2$.
Wówczas $U_1 \ni u_1 - u_1' = u_2' - u_2 \in U_2$.
Skoro $U_1 \cap U_2 = \{\theta\}$, więc $u_1 - u_1' = \theta$ oraz $u_2' - u_2 = \theta$.
Stąd $u_1 = u_1'$ oraz $u_2 = u_2'$.

Na odwrót, załóżmy, że jeśli $u_1 + u_2 = u_1' + u_2'$, gdzie $u_1, u_1' \in U_1$, $u_2, u_2' \in U_2$, to $u_1 = u_1'$ oraz $u_2 = u_2'$.
Ustalmy $u \in U_1 \cap U_2$.
Wówczas:

$$u = \underbrace{u}_{\in U_1} + \underbrace{\theta}_{\in U_2} = \underbrace{\theta}_{\in U_1} + \underbrace{u}_{\in U_2},$$

a zatem $u = \theta$.

Definicja:

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F, niech $U_1, \ldots, U_n < V$.
Jeżeli $V = U_1 + U_2$ oraz spełniony jest jeden z dwóch równoważnych warunków Uwagi 1., to mówimy, że V jest **sumą prostą** podprzestrzeni U_1 i U_2, co oznaczamy przez $V = U_1 \oplus U_2$.
Podprzestrzeń U_2 nazywamy wtedy **dopełnieniem liniowym** podprzestrzeni U_1.
Ogólniej, jeżeli $V = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$ oraz spełniony jest jeden z dwóch równoważnych warunków Uwagi 2., to mówimy, że V jest **sumą prostą** podprzestrzeni $U_1, U_2, \ldots, U_n$, co oznaczamy przez $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_n$.

Uwaga:

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F, niech $U_1, \ldots, U_n < V$ i niech $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_n$. Wówczas $V \cong U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$.

Dowód:

Zdefiniujmy odwzorowanie $f : V \to U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$ wzorem

$$f(u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = (u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

Sprawdzenie, że jest to dobrze określony izomorfizm pozostawiamy czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Baza i wymiar.

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F. Podzbiór $B \subset V$ nazywamy **bazą** *przestrzeni V, jeżeli:*

1. *B jest liniowo niezależny,*
2. *B jest generujący, tzn. $lin(B) = V$.*

Przykłady:

1. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{Q}^n$, lub $\mathbb{R}^n$, lub $\mathbb{C}^n$, lub $\mathbb{Z}_p^n$, lub $GF(p^m)^n$, lub, najogólniej, F^n, gdzie F jest dowolnym ciałem. Niech

$$\epsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \epsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \epsilon_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wówczas $(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n)$ jest bazą. Nazywamy ją często **bazą kanoniczną.**

2. Rozważmy przestrzeń $M_n^m(F)$ i niech

$$\epsilon_{ij} = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} & & & \uparrow & & \\ & & & j & & \end{array} & \end{array} .$$

Wówczas $(\epsilon_{11}, \dots, \epsilon_{1n}, \epsilon_{21}, \dots, \epsilon_{2n}, \dots, \epsilon_{m1}, \dots, \epsilon_{mn})$ jest bazą.

3. Rozważmy przestrzeń $F[x]$. Wówczas $(1, x, x^2, x^3, \ldots)$ jest bazą.
4. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{C}$ nad ciałem $\mathbb{R}$. Wówczas $(1, i)$ jest bazą.

Twierdzenie

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F, niech $B \subset V$. Następujące warunki są równoważne:

1. *B jest bazą,*
2. *B jest maksymalnym liniowo niezależnym podzbiorem V.*

Dowód:

$(1) \Rightarrow (2):$
Załóżmy, że B jest bazą.
Przypuśćmy, że istnieje liniowo niezależny podzbiór $B \subsetneq B' \subset V$.
Niech $v \in B' \setminus B$.
Ponieważ $V = lin(B)$, więc $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m$, dla pewnych $v_1, \ldots, v_m \in B$ oraz $a_1, \ldots, a_m \in F$.
Wówczas $1 \cdot v - a_1 v_1 - \ldots - a_m v_m = \theta$ i $1 \neq 0$, a więc B nie jest liniowo niezależny.

$(2) \Rightarrow (1)$:
Załóżmy, że B jest maksymalnym liniowo niezależnym podzbiorem V.
Wystarczy pokazać, że B jest generujący. Ustalmy $v \in V$. Jeśli $v \in B$, to $v \in lin(B)$.
Jeśli $v \notin B$, to $B \cup \{v\}$ jest liniowo zależny, a więc $av + a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m = \theta$ dla pewnych $a, a_1, \ldots, a_m \in F$ oraz $v_1, \ldots, v_m \in B$.
Ponieważ $v_1, \ldots, v_m$ są liniowo niezależne, więc $a \neq 0$.
Zatem $v = -\frac{a_1}{a} v_1 - \ldots - \frac{a_m}{a} v_m \in lin(B)$.

Wniosek

Każda przestrzeń liniowa ma bazę.

Dowód.
Jeżeli $V = \{\theta\}$, to zbiór pusty jest bazą.
Jeżeli $V \neq \{\theta\}$, to istnieje $\theta \neq v \in V$ i $A = \{v\}$ jest zbiorem liniowo niezależnym.
W niepustej rodzinie

$$\mathcal{X} = \{B \subset V : A \subset B \text{ i } B \text{ jest liniowo niezależny}\}$$

uporządkowanej przez inkluzję każdy łańcuch ma ograniczenie górne, a więc wobec lematu Kuratowskiego-Zorna istnieje element maksymalny, który wobec poprzedniego twierdzenia jest bazą. $\square$

Przykład:

5. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}$ nad ciałem $\mathbb{Q}$. Z poprzedniego twierdzenia wynika istnieje bazy tej przestrzeni, jakkolwiek wskazanie jej elementów nie jest możliwe. Bazę tę nazywamy **bazą Hamela.**

Twierdzenie

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F, niech $B \subset V$. Następujące warunki są równoważne:

1. *B jest bazą,*
2. *B jest generujący i dla każdego $v \in V$ istnieje dokładnie jedna kombinacja liniowa taka, że*

$$v = a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m,$$

dla $a_1, \ldots, a_m \in F$ i $v_1, \ldots, v_m \in B$.

Dowód:

$(1) \Rightarrow (2)$:
Ustalmy $v \neq 0$ i przypuśćmy, że

$$v = a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m = a_1' v_1' + \ldots + a_n' v_n'$$

dla $v_1, \ldots, v_m, v_1', \ldots, v_n' \in B$ oraz $a_1, \ldots, a_m, a_1', \ldots, a_n' \in F$.
Wówczas

$$\theta = a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m - a_1' v_1' - \ldots - a_n' v_n'$$

i ponieważ $v \neq \theta$, nie wszystkie a_i, a_j' są równe 0, skąd $v_1, \ldots, v_m, v_1', \ldots, v_n'$ są liniowo zależne.
Jest to możliwe, jeśli $n = m$ oraz $v_i = v_i'$.

$(2) \Rightarrow (1)$:
Przypuśćmy, że B jest liniowo zależny.
Wówczas

$$v = a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m$$

dla pewnych $v, v_1, \ldots, v_m \in B$ oraz $a_1, \ldots, a_m \in F$. Zatem $v = 1 \cdot v$ oraz $v = a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m$ są dwiema kombinacjami liniowymi wektorów z B dającymi v.

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F, niech $B \subset V$. Dla $v \in V$ jednoznacznie wyznaczone skalary $a_1, \ldots, a_m \in F$ takie, że dla pewnych $v_1, \ldots, v_m \in B$:

$$v = a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m$$

nazywamy **współrzędnymi** *wektora v w bazie B.*

Przykłady:

6. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}^3$. Ponieważ

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

więc wektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ma w bazie $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ współrzędne $(1, 2, 3)$.

7. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}^3$. Ponieważ

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

więc wektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ma w bazie $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ współrzędne $(2, 1, 0)$.

Lemat

Niech V *będzie przestrzenią liniową nad ciałem* F*, niech* $v, v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n \in V$*. Jeżeli* $v \in lin(v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n)$ *oraz* $v \notin lin(w_1, \ldots, w_n)$*, to dla pewnego* $i \in \{1, \ldots, m\}$*:*

$$v_i \in lin(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n).$$

Dowód.

Załóżmy, że $v = a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m + b_1 w_1 + \ldots + b_n w_n$, dla pewnych $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n \in F$.
Zauważmy, że istnieje $a_i \neq 0$ dla pewnego $i \in \{1, \ldots, m\}$: gdyby $a_1 = \ldots = a_m = 0$, to wówczas
$v = b_1 w_1 + \ldots + b_n w_n \in lin(w_1, \ldots, w_n)$.
Wobec tego:

$$v_i = -\frac{a_1}{a_i} v_1 - \ldots - \frac{a_{i-1}}{a_i} v_{i-1} + \frac{1}{a_i} v - \frac{a_{i+1}}{a_i} v_{i+1} - \ldots - \frac{a_m}{a_i} v_m - \frac{b_1}{a_i} w_1 - \ldots - \frac{b_n}{a_i}$$

$\square$

Twierdzenie (Lemat Steinitza[1] o wymianie)

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F, niech $v, v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n \in V$. Załóżmy, że $V = lin(v_1, \ldots, v_m)$ oraz że $w_1, \ldots, w_n$ są liniowo niezależne. Wówczas:

1. $n \leq m$,
2. *istnieją* $i_1, i_2, \ldots, i_{m-n}$ *takie, że*

$$V = lin(w_1, \ldots, w_n, v_{i_1}, \ldots, v_{i_{m-n}})$$

.

[1] Ernst Steinitz (1871-1928) urodzony w Laurahütte, dziś część Siemianowic Śląskich.

Dowód:

Dowód prowadzimy indukcyjnie względem n.
Dla $n = 0$ nie ma czego dowodzić.
Załóżmy, że jeśli $w_1, \ldots, w_n$ są liniowo niezależne, to $n \leq m$ oraz istnieją $i_1, \ldots, i_{m-n}$ takie, że $V = lin(w_1, \ldots, w_n, v_{i_1}, \ldots, v_{i_{m-n}})$.
Niech $w_1, \ldots, w_{n+1}$ będą liniowo niezależne.
Jeśli $n < m$, to $n + 1 \leq m$.
Jeśli $n = m$, to wobec założenia indukcyjnego $V = lin(w_1, \ldots, w_n)$ i stąd $w_{n+1} \in lin(w_1, \ldots, w_n)$, a więc $w_1, \ldots, w_n, w_{n+1}$ nie mogą być liniowo niezależne.

Pozostaje wykazać część (2) twierdzenia.
Wobec założenia indukcyjnego:

$$w_{n+1} \in V = lin(w_1, \dots, w_n, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n}}).$$

Ponadto $w_{n+1} \notin lin(w_1, \dots, w_n)$. Wobec Lematu **??**, po ewentualnej zmianie notacji

$$v_{i_{m-n}} \in lin(w_1, \dots, w_n, w_{n+1}, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n-1}}).$$

Zauważmy, że ponieważ każdy z wektorów $w_1, \dots, w_n, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n}}$ jest kombinacją liniową wektorów $w_1, \dots, w_n, w_{n+1}, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n-1}}$ oraz ponieważ $V = lin(w_1, \dots, w_n, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n}})$, więc w konsekwencji

$$V = lin(w_1, \dots, w_n, w_{n+1}, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n-1}}).$$

Wniosek

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F. Jeżeli n-elementowy układ jest bazą przestrzeni V, to każda baza tej przestrzeni składa się z dokładnie n wektorów.

Dowód.

Niech $(w_1, \ldots, w_n)$ i $(v_1, \ldots, v_m)$ będą bazami. Wówczas układ $(v_1, \ldots, v_m)$ jest liniowo niezależny, a $(w_1, \ldots, w_n)$ generujący, więc z lematu Steinitza $m \leq n$. Przez symetrię $n \leq m$. $\square$

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F. Liczbę elementów dowolnej skończonej bazy przestrzeni V nazywamy **wymiarem** *i oznaczamy* $\dim V$. *Jeżeli nie istnieje skończona baza danej przestrzeni, przyjmujemy* $\dim V = \infty$.

Twierdzenie

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F, niech $\dim V = n$. *Wówczas jeżeli $U < V$, to* $\dim U \leq n$.

Dowód.

Wobec lematu Steinitza każdy liniowo niezależny podzbiór V ma co najwyżej n elementów. Ponadto każdy liniowo niezależny podzbiór U jest liniowo niezależnym podzbiorem V, a więc ma co najwyżej n elementów. W szczególności baza U ma co najwyżej n elementów, a więc $\dim U \leq n$. $\square$

Wniosek

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F, niech $\dim V = n$. *Niech $U < V$. Następujące warunki są równoważne:*

1. $U = V$,
2. $\dim U = n$.

Dowód.

$(1) \Rightarrow (2)$: Jeżeli $U = V$, to oczywiście $\dim U = n$.
$(2) \Rightarrow (1)$: Załóżmy, że $(v_1, \ldots, v_n)$ jest bazą U. Bazę tę można uzupełnić do bazy V. Ale baza V będzie miała n elementów, a zatem $(v_1, \ldots, v_n)$ jest bazą V. $\square$

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F, niech $v_1, \ldots, v_n \in V$, niech $a_1, \ldots, a_n \in F$. Równość postaci

$$a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = \theta$$

nazywamy **zależnością** *między $v_1, \ldots, v_n$. Ciągi współczynników $(a_1, \ldots, a_n)$ odpowiadających wszystkim zależnościom między $v_1, \ldots, v_n$ tworzą podzbiór przestrzeni F^n oznaczany przez $\mathcal{Z}(v_1, \ldots, v_n)$ i nazywany* **zbiorem zależności** *między $v_1, \ldots, v_n$.*

Twierdzenie

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F, niech $v_1, \ldots, v_n \in V$. Wówczas zbiór zależności $\mathcal{Z}(v_1, \ldots, v_n)$ jest podprzestrzenią przestrzeni F^n oraz

$$\dim \mathcal{Z}(v_1, \ldots, v_n) = n - \dim lin(v_1, \ldots, v_n).$$

Dowód:

Sprawdzenie, że $\mathscr{Z}(v_1, \ldots, v_n)$ jest podprzestrzenią pozostawiamy Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.
Niech $r = \dim lin(v_1, \ldots, v_n)$.
Wówczas każdy maksymalny liniowo niezależny podzbiór zbioru $\{v_1, \ldots, v_n\}$ składa się z r elementów.
Możemy założyć, że $v_1, \ldots, v_r$ są liniowo niezależne.
Wówczas

$$v_{r+i} = a_{i1}v_1 + \ldots + a_{ir}v_r$$

dla pewnych $a_{i1}, \ldots, a_{ir} \in F$, $i \in \{1, \ldots, n-r\}$.

Pokażemy, że

$$\begin{aligned}
&(a_{11}, \ldots, a_{1r}, -1, 0, \ldots, 0),\\
&(a_{21}, \ldots, a_{2r}, 0, -1, \ldots, 0),\\
&\vdots\\
&(a_{n-r,1}, \ldots, a_{n-r,r}, 0, 0, \ldots, -1)
\end{aligned}$$

tworzą bazę przestrzeni $\mathscr{Z}(v_1, \ldots, v_n)$.
Ponieważ

$$a_{i1}v_1 + \ldots + a_{ir}v_r - v_{r+i} = \theta$$

więc $(a_{i1}, \ldots, a_{ir}, 0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots, 0) \in \mathscr{Z}(v_1, \ldots, v_n)$.

Załóżmy, że

$$\begin{aligned}(0,\ldots,0) &= x_1(a_{11},\ldots,a_{1r},-1,0,\ldots,0)\\ &+ x_2(a_{21},\ldots,a_{2r},0,-1,\ldots,0)\\ &\vdots\\ &+ x_{n-r}(a_{n-r,1},\ldots,a_{n-r,r},0,0,\ldots,-1).\end{aligned}$$

W szczególności dla współrzędnej $n-r+i$:

$$-x_i = 0,$$

a więc $x_1 = \ldots = x_{n-r} = 0$ i wektory są liniowo niezależne.

Ustalmy $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{Z}(v_1, \ldots, v_n)$.
Wówczas

$$\begin{aligned}
(a_1, \ldots, a_n) &+ a_1(a_{11}, \ldots, a_{1r}, -1, 0, \ldots, 0) \\
&+ \quad a_2(a_{21}, \ldots, a_{2r}, 0, -1, \ldots, 0) \\
&\quad\;\; \vdots \\
&+ \quad a_n(a_{n-r,1}, \ldots, a_{n-r,r}, 0, 0, \ldots, -1) \\
&= \quad (a_1 + a_1 a_{11} + \ldots + a_n a_{n-r,1}, \ldots, (a_r + a_1 a_{1r} + \ldots + a_n a_{n-r,r}, 0, \ldots \\
&\in \quad \mathcal{Z}(v_1, \ldots, v_n),
\end{aligned}$$

a zatem

$$(a_1 + a_1 a_{11} + \ldots + a_n a_{n-r,1}) v_1 + \ldots + (a_r + a_1 a_{1r} + \ldots + a_n a_{n-r,r}) v_r = \theta.$$

Ponieważ $v_1, \ldots, v_r$ są liniowo niezależne, więc

$$a_1 + a_1 a_{11} + \ldots + a_n a_{n-r,1} = \ldots = a_r + a_1 a_{1r} + \ldots + a_n a_{n-r,r} = 0$$

i tym samym

$$\begin{aligned} (a_1, \ldots, a_n) = -a_1(a_{11}, \ldots, a_{1r}, -1, 0, \ldots, 0) \\ - \quad a_2(a_{21}, \ldots, a_{2r}, 0, -1, \ldots, 0) \\ \vdots \\ - \quad a_n(a_{n-r,1}, \ldots, a_{n-r,r}, 0, 0, \ldots, -1). \end{aligned}$$

Twierdzenie

Niech V *będzie przestrzenią liniową nad ciałem* F, *niech* $U_1, U_2 < V$, $\dim U_1 < \infty$, $\dim U_2 < \infty$. *Wówczas* $\dim(U_1 \cap U_2) < \infty$, $\dim(U_1 + U_2) < \infty$ *oraz*

$$\dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2.$$

Dowód:

Ponieważ $U_1 \cap U_2 \subset U_1$ oraz $\dim U_1 < \infty$, więc $\dim(U_1 \cap U_2) < \infty$.
Niech $(v_1, \ldots, v_k)$ będzie bazą $U_1 \cap U_2$.
Możemy uzupełnić ją do bazy $(v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_n)$ podprzestrzeni U_1 i do bazy $(v_1, \ldots, v_k, \ldots, w_m)$ podprzestrzeni U_2.
Oczywiście $lin(v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_n, \ldots, w_m) = U_1 + U_2$.
Pokażemy, że wektory $(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n, w_{k+1}, \ldots, w_m)$ są liniowo niezależne.

Załóżmy, że $a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n + b_{k+1} w_{k+1} + \ldots + b_m w_m = \theta$ dla pewnych $a_1, \ldots, a_n, b_{k+1}, \ldots, b_m \in F$.
Wówczas

$$a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = -b_{k+1} w_{k+1} - \ldots - b_m w_m \in U_2,$$

a więc $a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n \in U_1 \cap U_2$.
Tym samym $a_{k+1} = \ldots = a_n = 0$, a więc $a_1 v_1 + \ldots + a_k v_k + b_{k+1} w_{k+1} + \ldots + b_m w_m = \theta$ i skoro $(v_1, \ldots, v_k, \ldots, w_m)$ są liniowo niezależne, więc również $a_1 = \ldots = a_k = b_{k+1} = \ldots = b_m = 0$.

Wniosek

Niech V *będzie przestrzenią liniową nad ciałem* F, *niech* $\dim V < \infty$, *niech* $U_1, U_2 < V$. *Wówczas*

$$\dim(U_1 \cap U_2) \geq \dim U_1 + \dim U_2 - n$$

gdzie $\dim V = n$.

Dowód.

Wystarczy zauważyć, że $\dim(U_1 + U_2) \leq n$. $\square$

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F, niech $\dim V < \infty$. **Hiperpłaszczyzną** *nazywamy każdą podprzestrzeń przestrzeni V o wymiarze $n - 1$.*

Twierdzenie

Niech V *będzie przestrzenią liniową nad ciałem* F*, niech* $\dim V = n$*. Niech* $U < V$ *i niech* $\dim U = k$*. Wówczas* U *jest częścią wspólną* $n - k$ *hiperpłaszczyzn.*

Dowód.
Niech $(v_1, \ldots, v_k)$ będzie bazą U.
Możemy uzupełnić ją do bazy $(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n)$ przestrzeni V.
Niech $W_i = lin(v_1, \ldots, v_{k+i-1}, v_{k+i+1}, \ldots, v_n)$, $i \in \{1, \ldots, n-k\}$.
Pokażemy, że $U = W_1 \cap \ldots \cap W_{n-k}$.
Oczywiście $U = lin(v_1, \ldots, v_k) \subset W_1 \cap \ldots \cap W_{n-k}$.
Ustalmy $v \in W_1 \cap \ldots \cap W_{n-k}$.
Niech $v = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$ dla pewnych $a_1, \ldots, a_n \in F$.
Ustalmy $i \in \{1, \ldots, n-k\}$.
Wówczas $v \in W_i$, a więc $a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n \in W_i$.
Tym samym $a_{k+i} = 0$. $\square$

Twierdzenie

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F, niech $\dim V = n$. Niech $W_1, \ldots, W_l$ będą hiperpłaszczyznami. Wówczas

$$\dim(W_1 \cap \ldots \cap W_l) \geq n - l.$$

Dowód.

Dla $l = 1$ nie ma czego dowodzić.
Załóżmy, że $l > 1$ i że dla l hiperpłaszczyzn rezultat jest prawdziwy. Niech $W_1, \ldots, W_{l+1}$ będą hiperpłaszczyznami.
Wówczas $\dim(W_1 \cap \ldots \cap W_l) \geq n - l$.
Wobec poprzedniego wniosku $\dim(W_1 \cap \ldots \cap W_l \cap W_{l+1}) \geq \dim(W_1 \cap \ldots \cap W_l) + n - 1 - n \geq n - l - 1 = n - (l + 1)$. □

Wniosek

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F, niech $\dim V = n$. *Niech $U < V$ i niech* $\dim U = k$. *Wówczas U jest częścią wspólną $n-k$, ale nie mniejszej liczby hiperpłaszczyzn.*