Przestrzenie liniowe i podprzestrzenie

Definicja:

Niech F będzie ciałem.
Algebrę $(V, F, +, \cdot)$, gdzie $V \neq \emptyset$, $+$ jest działaniem w zbiorze V zwanym **dodawaniem wektorów,** a $\cdot$ jest działaniem zewnętrznym ciała F na V zwanym **mnożeniem przez skalar** nazywamy **przestrzenią liniową** (lub **wektorową**), jeżeli:

1. $\forall v, w, u \in V[v + (u + w) = (v + u) + w]$,
2. $\forall v, w \in V[v + w = w + v]$,
3. $\forall v \in V \exists w \in W[v + w = \theta]$, gdzie θ jest pewnym ustalonym elementem V,
4. $\forall v \in V[v + \theta = \theta + v = v]$,
5. $\forall a, b \in F \forall v \in V[(a + b)v = av + bv]$,
6. $\forall a \in F \forall v, w \in V[a(v + w) = av + aw]$,
7. $\forall a, b \in F \forall v \in V[a(bv) = (ab)v]$,
8. $\forall v \in V[1 \cdot v = v]$.

Elementy zbioru V tradycyjnie nazywamy **wektorami.**

Przykłady:

1. Niech E będzie płaszczyzną euklidesową, niech $P \in E$ będzie ustalonym punktemm niech

$$S_P(E) = \{\overrightarrow{PQ} : Q \in E\}$$

   będzie zbiorem wektorów zaczepionych w pukcie P.
   Wówczas $(S_P(E), \mathbb{R}, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, gdzie $+$ jest działaniem dodawania wektorów na płaszczyźnie zgodnie z regułą równoległoboku, a $\cdot$ jest działaniem mnożenia wektorów przez skalary rzeczywiste.

2. Szczególnym przypadkiem powyższej konstrukcji jest przestrzeń $(S_{(0,0)}(E), \mathbb{R}, +, \cdot)$ wektorów zaczepionych w początku układu współrzędnych $(0, 0)$.

3. Uogólnieniem poprzedniego przykładu jest **przestrzeń współrzędnych.**
   Niech F będzie dowolnym ciałem, niech $n \in \mathbb{N}$, niech

$$F^n = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} : a_1, \ldots, a_n \in F \right\}.$$

   Wówczas $(F^n, F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, gdzie $+$ oraz $\cdot$ są działaniami zdefiniowanymi wzorami:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_n \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \text{ oraz } a \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa_1 \\ \vdots \\ aa_n \end{bmatrix}.$$

4. Wektory przestrzeni współrzędnych wygodnie jest czasem zapisywać poziomo zamiast pionowo.
   Niech F będzie dowolnym ciałem, niech $n \in F$, niech

$$F_n = \{[a_1, \dots, a_n] : a_1, \dots, a_n \in F\}.$$

   Wówczas $(F_n, F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, gdzie $+$ oraz $\cdot$ są działaniami zdefiniowanymi wzorami:

$$[a_1, \dots, a_n] + [b_1, \dots, b_n] = [a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n]$$

   oraz

$$a[a_1, \dots, a_n] = [aa_1, \dots, aa_n].$$

5. Niech F będzie dowolnym ciałem.
   Wówczas $(M_n^m(F), F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, gdzie $+$ oraz $\cdot$ są działaniami dodawania macierzy i mnożenia macierzy przez skalar.

6. Niech F będzie dowolnym ciałem, niech

$$F^{\infty} = \{(a_1, a_2, \ldots) : a_i \in F, \text{ dla } i \in \mathbb{N}\}$$

będzie zbiorem ciągów elementów ciała F.
Wówczas $(F^{\infty}, F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, gdzie $+$ oraz $\cdot$ są działaniami zdefiniowanymi wzorami:

$$(a_1, a_2, \ldots) + (b_1, b_2, \ldots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots)$$

oraz

$$a(a_1, a_2, \ldots) = (aa_1, aa_2, \ldots).$$

7. Niech F będzie dowolnym ciałem, niech

$$F^{(\infty)} = \{(a_1, a_2, \ldots) : a_i \in F, \text{ dla } i \in \mathbb{N}, a_i = 0 \text{ dla prawie wszystkic}$$

będzie zbiorem ciągów elementów ciała F o skończonej liczbie niezerowych wyrazów.
Wówczas $(F^{(}\infty), F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, gdzie $+$ oraz $\cdot$ są działaniami zdefiniowanymi jak w poprzednim przykładzie.

8. Niech F będzie dowolnym ciałem, niech $A \neq \emptyset$ będzie niepustym zbiorem, niech

$$F^A = \{f : A \to F : f \text{ jest funkcją}\}$$

będzie zbiorem wszystkich funkcji ze zbioru A w ciało F. Wówczas $(F^A, F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, gdzie $+$ i $\cdot$ są działaniami zdefiniowanymi następująco:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \text{ dla } x \in A,$$

oraz

$$(a \cdot f)(x) = af(x), \text{ dla } x \in A.$$

9. Szczególnym przypadkiem poprzedniego przykładu jest sytuacja, w której zbiór $A = \{x\}$ jest jednoelementowy. Zbiór F^A oznaczamy wówczas F^x i przestrzeń $(F^x, F, +, \cdot)$ definiujemy przez działania jak w poprzednim przykładzie.

10. Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem na prostej rzeczywistej, niech

$$C_n(I) = \{f : I \to \mathbb{R} : f^{(n)} \text{ jest ciągła}\}$$

będzie zbiorem wszystkich funkcji rzeczywistych na przedziale I, których $n-$ta pochodna jest ciągła.
Wówczas $(C_n(I), \mathbb{R}, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, gdzie działania $+$ i $\cdot$ definiujemy jak w poprzednich dwóch przykładach.

11. Niech F będzie dowolnym ciałem.
Wówczas $(F[x], F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, gdzie $+$ i $\cdot$ są działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianu przez skalar.

12. Niech F będzie dowolnym ciałem, niech $n \in \mathbb{N}$ i niech

$$F[x]_n = \{f \in F[x] : \deg f \leq n\}$$

będzie zbiorem wielomianów stopnia co najwyżej n. Wówczas $(F[x]_n, F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, gdzie $+$ i $\cdot$ są działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianu przez skalar.

13. Niech F będzie dowolnym ciałem.
Wówczas $(F[x_1, \ldots, x_n], F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, gdzie $+$ i $\cdot$ są działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianu przez skalar.

14. Niech F będzie dowolnym ciałem, niech $m \in \mathbb{N}$ i niech

$$F[x_1, \ldots, x_n]_m = \{f \in F[x_1, \ldots, x_n] : \deg f \leq m\}$$

będzie zbiorem wielomianów stopnia co najwyżej m.
Wówczas $(F[x_1, \ldots, x_n]_m, F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, gdzie $+$ i $\cdot$ są działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianu przez skalar.

15. Rozważmy ciała $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
Wówczas $(\mathbb{R}, \mathbb{Q}, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, gdzie $+$ i $\cdot$ są działaniami dodawania liczb rzeczywistych i mnożenia liczb rzeczywistych przez liczby wymierne.
Podobnie $(\mathbb{C}, \mathbb{Q}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{C}, \mathbb{R}+, \cdot)$ są przestrzeniami liniowymi.

16. Powyższy przykład można uogólnić jak następuje: niech F i E będą dowolnymi ciałami, przy czym $F \subset E$.
Wówczas $(E, F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, gdzie $+$ i $\cdot$ są działaniami dodawania w ciele E i mnożenia elementów ciała E przez elementy podciała F.

17. Szczególny przypadek poprzedniego przykładu zachodzi, gdy $E = F$.
Wówczas $(F, F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową ciała F nad samym sobą.

18. Niech $(V_i, F, +_i, \cdot_i)$, dla $i \in \{1, \ldots, n\}$, będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem F.
Wówczas $(V_1 \times \ldots \times V_n, F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową gdzie $+$ i $\cdot$ są działaniami zdefiniowanymi następująco:

$$(v_1, v_2, \ldots, v_n) + (w_1, w_2, \ldots, w_n) = (v_1 +_1 w_1, v_2 +_2 w_2, \ldots, v_n +_n w_n)$$

oraz

$$a \cdot (v_1, v_2, \ldots, v_n) = (a \cdot_1 v_1, a \cdot_2 v_2, \ldots, a \cdot_n v_n).$$

Twierdzenie:

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F. Wówczas:

1. $\forall v, w, u \in V[v + w = v + u \Rightarrow w = u]$,
2. $\forall v, w \in V[v = -w \Rightarrow v + w = 0]$,
3. $\forall v, w \in V[v - w = v + (-w)]$,
4. $\forall a \in F \forall v \in V[av = \theta \Rightarrow a = 0 \vee v = 0]$,
5. $\forall a \in F[a \cdot \theta = \theta]$,
6. $\forall v \in V[0 \cdot v = \theta]$,
7. $\forall v \in V[-v = (-1)v]$,
8. $\forall v, w, u \in V[v - (w + u) = (v - w) - u]$,
9. $\forall v, w, u \in V[v - (w - u) = (v - w) + u]$,
10. $\forall v, w \in V[-(v + w) = (-v) + (-w)]$,
11. $\forall v, w \in V[-(v - w) = (-v) + w]$
12. $\forall v, w \in V \forall a \in F[a(v - w) = av - aw]$, ,
13. $\forall v \in V \forall a, b \in F[(a - b)v = av - bv]$,
14. $\forall v \in V \forall a \in F[a(-v) = (-a)v = -av]$,
15. $\forall v \in V \forall a \in F[(-a)(-v) = av]$.

Definicja:

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F. Podzbiór U przestrzeni V nazywamy **podprzestrzenią,** jeżeli:

1. $\forall v, w \in U[v + w \in U]$,
2. $\forall a \in F \forall v \in U[a \cdot v \in U]$.

Podprzestrzenie oznaczamy symbolem $U < V$.

Przykłady:

19. Niech F będzie dowolnym ciałem i rozważmy przestrzeń F^2, a w niej podzbiór

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 2a \end{bmatrix} : a \in F \right\}.$$

Wówczas zbiór ten jest podprzestrzenią.

Istotnie, dla dowolnych dwóch wektorów $\begin{bmatrix} a \\ 2a \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} b \\ 2b \end{bmatrix}$ i dla dowolnego skalara $\lambda \in F$ zachodzi:

$$\begin{bmatrix} a \\ 2a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ 2a+2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+b) \\ 2(a+b) \end{bmatrix} \in U$$

oraz

$$\lambda \begin{bmatrix} a \\ 2a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda a) \\ 2(\lambda a) \end{bmatrix} \in U.$$

19. Niech F będzie dowolnym ciałem i rozważmy przestrzeń F^2, a w niej podzbiór

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix} : a \in F \right\}.$$

Wówczas nie jest to podprzestrzeń; istotnie $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in U$ oraz $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in U$, ale

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+1 \end{bmatrix} \notin U.$$

Twierdzenie:

Niech F będzie ciałem, niech $m, n \in \mathbb{N}$ i rozważmy jednorodny układ równań o współczynnikach z ciała F:

$$\mathcal{U}: \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Wówczas zbiór rozwiązań $Sol(\mathcal{U})$ jest podprzestrzenią przestrzeni F^n.

Dowód:

Niech $x_1, \ldots, x_n$ oraz $y_1, \ldots, y_n$ będą rozwiązaniami układu $\mathcal{U}$, niech $a \in F$.
Oczywiście rozwiązania te możemy interpretować jako wektory
$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ przestrzeni F^n.
Pokażemy, że

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \in Sol(\mathcal{U}).$$

Istotnie, wystarczy pokazać, że $x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n$ jest rozwiązaniem układu $\mathcal{U}$.
Ustalmy $i \in \{1, \ldots, m\}$.
Wówczas:

$$\begin{aligned}
& a_{i1}(x_1 + y_1) + a_{i2}(x_2 + y_2) + \ldots + a_{in}(x_n + y_n) \\
& \quad = \quad (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n) + (a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{in}y_n) \\
& \quad = \quad 0 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

Pozostaje sprawdzić, że $a \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in Sol(\mathcal{U})$.

Faktycznie, dla $i \in \{1, \ldots, m\}$:

$$a_{i1}(ax_1)+a_{i2}(ax_2)+\ldots+a_{in}(ax_n) = a(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n) = a0 = 0.$$

Twierdzenie:

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F. Podzbiór $U \subset V$ jest podprzestrzenią przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy $(U, F, +|_{U\times U}, \cdot|_{F\times U})$ jest przestrzenią liniową.

Twierdzenie:

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F, niech $\mathcal{W}$ będzie pewną rodziną podprzestrzeni przestrzeni V. Wówczas $\bigcap \mathcal{W} < V$.

Dowód:

Ustalmy $v, w \in \bigcap \mathcal{W}$ oraz $a \in F$.
Pokażemy, że $v + w \in \bigcap \mathcal{W}$.
Istotnie, jako że $v, w \in \bigcap \mathcal{W}$, więc $v, w \in U$ dla wszystkich $U \in \mathcal{W}$, a stąd $v + w \in U$, dla wszystkich $U \in \mathcal{W}$.
Ale to oznacza, że $v + w \in \bigcap \mathcal{W}$.
Analogicznie sprawdzamy, że $av \in \bigcap \mathcal{W}$.

Definicja:

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F, a $A \subset V$ pewnym zbiorem. Najmniejszą podprzestrzeń przestrzeni V zawierającą zbiór A nazywamy **podprzestrzenią generowaną przez** A i oznaczamy $lin(A)$. Każdy zbiór A o tej własności, że $lin(A) = U$ nazywamy **zbiorem generatorów** podprzestrzeni U. Jeśli $A = \{v_1, \ldots, v_m\}$, to oznaczamy

$$lin(v_1, \ldots, v_m) = lin(A).$$

Mówimy, że podprzestrzeń U jest **skończenie generowana,** gdy istnieją takie wektory $v_1, \ldots, v_m \in V$, że

$$U = lin(v_1, \ldots, v_m).$$

Twierdzenie o postaci elementów podprzestrzeni generowanej przez zbiór:

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F oraz niech $A \subset V$. Wówczas

$$lin(A) = \{a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m : m \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_m \in F, v_1, \ldots, v_m \in A\}.$$

Dowód:

Oznaczmy

$$U = \{a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m : m \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_m \in F, v_1, \ldots, v_m \in A\}.$$

Pokażemy, że $U < V$.
Istotnie, jeśli $a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m, a_1' v_1' + \ldots + a_m' v_m' \in U$, to wówczas $a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m + a_1' v_1' + \ldots + a_m' v_m' \in U$.
Podobnie dla $a \in F$ mamy
$a(a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m) = aa_1 v_1 + \ldots + aa_m v_m \in U$.

Pokażemy, że $U = lin(A)$.
Inkluzja ($\supset$) jest oczywista, pozostaje wykazać ($\subset$).
Dowód prowadzimy przez indukcję względem m.
Dla $m = 1$ niech $v_1 \in A$.
Wówczas $a_1 v_1$ należy do każdej podprzestrzeni zawierającej v_1, w szczególności do $lin(A)$.

Dla $m > 1$ ustalmy $v_1, \ldots, v_m \in A$ oraz $a_1, \ldots, a_m \in F$ i załóżmy, że

$$a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m \in lin(A).$$

Ustalmy $a_{m+1} \in F$ oraz $v_{m+1} \in A$.
Wówczas

$$\underbrace{a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m}_{\in lin(A)} + \underbrace{a_{m+1} \underbrace{v_{m+1}}_{\in lin(A)}}_{\in lin(A)}.$$

Definicja:

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F, niech $v_1, \ldots, v_m \in V$, niech $a_1, \ldots, a_m \in F$. Wektor

$$a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m$$

nazywamy **kombinacją liniową** wektorów $v_1, \ldots, v_m$.

Przykłady:

21. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}^3$. Wektor

$$1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

jest kombinacją liniową wektorów $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Definicja:

Niech $(V, F, +_V, \cdot_V)$ i $(W, F, +_W, \cdot_W)$ będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem F. Funkcję $f : V \to W$ nazywamy **izomorfizmem** przestrzeni liniowych, jeżeli jest bijekcją i spełnione są warunki:

1. $\forall v, w \in V[f(v +_V w) = f(v) +_W f(w)]$,
2. $\forall a \in F \forall v \in V[f(a \cdot_V v) = a \cdot_W f(v)]$.

Jeżeli istnieje izomorfizm $f : V \to W$, to przestrzenie V i W nazywamy **izomorficznymi**, co oznaczamy przez $V \cong W$.

Przykłady:

22. Niech F będzie dowolnym ciałem, niech $n \in \mathbb{N}$.
Wówczas przestrzenie F^n oraz F_n są izomorficzne.
Istotnie, rozważmy funkcję $f : F^n \to F_n$ daną wzorem

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = [x_1, \dots, x_n].$$

Sprawdzenie, że funkcja ta jest bijekcją pozostawiamy czytelnikowi jako łatwe ćwiczenie.

Ustalmy $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in F^n$ oraz $a \in F$.

Wówczas:

$$\begin{aligned} f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}\right) \\ = \quad & [x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n] = [x_1, \ldots, x_n] + [y_1, \ldots, y_n] \\ = \quad & f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

Podobnie:

$$
\begin{aligned}
& f\left(a\cdot\begin{bmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\right)\\
= \quad & f\left(\begin{bmatrix} ax_1\\ \vdots\\ ax_n\end{bmatrix}\right)\\
= \quad & [ax_1,\ldots,ax_n] = a[x_1,\ldots,x_n]\\
= \quad & a\left(\begin{bmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\right).
\end{aligned}
$$

23. Niech F będzie dowolnym ciałem, niech $m, n \in \mathbb{N}$.
Wówczas przestrzenie F_{nm} oraz $M_m^n(F)$ są izomorficzne.
Istotnie, podobnie jak wcześniej sprawdzamy, że odwzorowanie $f : F_{nm} \to M_m^n(F)$ dane wzorem:

$$\begin{aligned} & f\left([x_{11}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, \ldots, x_{2n}, \ldots, x_{m1}, \ldots, x_{mn}]\right) \\ = & \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{mn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

jest izomorfizmem przestrzeni liniowych.

24. Niech F będzie dowolnym ciałem, niech $n \in \mathbb{N}$.
Wówczas przestrzenie F_{n+1} oraz $F[x]_n$ są izomorficzne.
Istotnie, podobnie jak wcześniej sprawdzamy, że odwzorowanie $f : F_{n+1} \longrightarrow F[x]_n$ dane wzorem:

$$f([a_0, a_1, \ldots, a_n]) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

jest izomorfizmem przestrzeni liniowych.

Twierdzenie:

Izomorfizm przestrzeni liniowych jest relacją równoważności w klasie wszystkich przestrzeni liniowych.

Przykład:

25. Niech F będzie dowolnym ciałem, niech $n, m \in \mathbb{N}$. Wówczas przestrzenie F^{nm} i $M_m^n(F)$ są izomorficzne. Istotnie, poprzednio sprawdziliśmy, że $F^{nm} \cong F_{nm}$ oraz $F_{nm} \cong M_m^n(F)$. Ponieważ relacja $\cong$ jest równoważnością, a więc w szczególności jest przechodnia, również $F^{nm} \cong M_m^n(F)$. Podobnie możemy sprawdzić, że $F^{n+1} \cong F[x]_n$.

Liniowa niezależność. Warstwy i przestrzenie ilorazowe.

Definicja:

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F, niech $A \subset V$. Zbiór wektorów A nazywamy **liniowo niezależnym**, jeżeli

$$\forall m \in \mathbb{N} \forall v_1, \ldots, v_m \in A \forall a_1, \ldots, a_m \in F$$
$$[a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m = \theta \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0].$$

Jeżeli dany zbiór wektorów nie jest liniowo niezależny, to mówimy, że jest **liniowo zależny.**

Uwaga:

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F, niech $A = \{v_1, \ldots, v_m\}$.
Wówczas zbiór A jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall a_1, \ldots, a_m \in F[a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m = \theta \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0].$$

Przykłady:

1. Niech F będzie dowolnym ciałem i rozważmy przestrzeń F^3.

   Wówczas wektory $\epsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\epsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $\epsilon_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ są liniowo niezależne.

   Istotnie, ustalmy $a_1, a_2, a_3 \in F$ i załóżmy, że

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Oznacza to, że a_1, a_2, a_3 jest rozwiązaniem układu:

$$\mathcal{U} : \begin{cases} 1a_1 + 0a_2 + 0a_3 = 0 \\ 0a_1 + 1a_2 + 0a_3 = 0 \\ 0a_1 + 0a_2 + 1a_3 = 0 \end{cases} .$$

Macierz współczynników lewych stron równań układu $\mathcal{U}$ jest równa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

a jej wyznacznik $\det(A) = 1 \neq 0$, a zatem wobec wzorów Cramera układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

2. Niech F będzie dowolnym ciałem i rozważmy przestrzeń F^3.

   Wówczas wektory $\epsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\epsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $\epsilon_1 + \epsilon_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

   są liniowo zależne.

   Istotnie:

$$1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie:

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F, niech $v_1, \ldots, v_m \in V$. Wektory $v_1, \ldots, v_m$ są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wektor $v \in \{v_1, \ldots, v_m\}$ bedący kombinacją liniową pozostałych.

Dowód:

$(\Rightarrow)$: Załóżmy, że $v_1, \ldots, v_m$ są liniowo zależne.
Wówczas istnieją skalary $a_1, \ldots, a_m \in F$ takie, że

$$a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m = theta,$$

z których przynajmniej jeden jest niezerowy.
Powiedzmy, że $a_1 \neq 0$.
Wobec tego:

$$v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2 - \ldots - \frac{a_m}{a_1} v_m.$$

$(\Leftarrow)$: Załóżmy, że jeden z wektorów, powiedzmy v_1, jest kombinacją liniową $v_2, \ldots, v_m$:

$$v_1 = a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m.$$

Wówczas $1 \cdot v_1 - a_2 v_2 - \ldots - a_m v_m = \theta$ oraz $1 \neq 0$.

Twierdzenie:

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F, niech $A \subset B \subset V$. Wówczas:

1. jeśli A jest liniowo zależny, to B jest liniowo zależny;
2. jeśli B jest liniowo niezależny, to A jest liniowo niezależny;
3. jeśli A jest liniowo zależny, to istnieją wektory $v_1, \ldots, v_m \in A$, które są liniowo zależne.

Definicja:

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F, niech $U < V$. **Warstwą** wektora $v \in V$ względem podprzestrzeni U nazywamy zbiór

$$v + U = \{v + w : w \in U\}.$$

Zbiór wszystkich warstw oznaczamy przez V/U.

Przykład:

3. Rozważmy ciało $\mathbb{Z}_3$ i przestrzeń $\mathbb{Z}_3^2$.
   Sprawdzamy, że

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

   jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{Z}_3^2$, zaś sama przestrzeń $\mathbb{Z}_3^2$ składa się z następujących wektorów:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_3^2 \quad = \quad & \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \right. \\ & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ & \left. \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Warstwy podprzestrzeni U to:

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + U &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = U \\
\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + U &= U, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + U = U \\
\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + U &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = W_1 \\
\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + U &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = W_1 \\
\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + U &= W_1 \\
\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + U &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} = W_2 \\
\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + U &= W_2, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + U = W_2.
\end{aligned}
$$

Twierdzenie:

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F, niech $U < V$. W zbiorze warstw V/U definiujemy dodawanie:

$$(v + U) + (w + U) = (v + w) + U$$

oraz mnożenie przez skalar $a \in F$:

$$a \cdot (v + U) = (a \cdot v) + U.$$

Wówczas $(V/U, F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową. Nazywamy ją **przestrzenią ilorazową.**

Przykład:

4. Odwołując się do poprzedniego przykładu, rozważmy przestrzeń ilorazową $\mathbb{Z}_3^2/U = \{U, W_1, W_2\}$, gdzie

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

oraz

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Sprawdzamy, że, na przykład:

$$\begin{aligned} W_1 + W_2 &= \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + U \right) + \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + U \right) \\ &= \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right) + U = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + U = U. \end{aligned}$$

Twierdzenie:

Niech F będzie ciałem, niech $m, n \in \mathbb{N}$ i rozważmy układ równań o współczynnikach z ciała F:

$$\mathcal{U} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Niech ponadto $\mathcal{U}_0$ będzie układem jednorodnym powstałym z $\mathcal{U}$ przez zastąpienie prawych stron równań zerami:

$$\mathcal{U}_0 : \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Wówczas zbiór rozwiązań $Sol(\mathcal{U})$ jest warstwą podprzestrzeni rozwiązań układu jednorodnego $U = Sol(\mathcal{U}_0)$ w przestrzeni F^n.

Dowód:

Niech $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ oraz $\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ będą rozwiązaniami układu $\mathcal{U}$.

Pokażemy, że

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - y_1 \\ \vdots \\ x_n - y_n \end{bmatrix} \in U = Sol(\mathcal{U}_0).$$

Ustalmy $i \in \{1, \ldots, m\}$.
Wówczas:

$$\begin{aligned} & a_{i1}(x_1 - y_1) + a_{i2}(x_2 - y_2) + \ldots + a_{in}(x_n - y_n) \\ = \ & (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n) - (a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{in}y_n) \\ = \ & b_i - b_i = 0. \end{aligned}$$

Oznacza to, że $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + U$.

Wobec dowolności $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, oznacza to, że $Sol(\mathcal{U}) \subset \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + U$.

Dla dowodu drugiej inkluzji ustalmy
$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + z_1 \\ \vdots \\ y_n + z_n \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + U$, gdzie
$\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \in U$.
Ustalmy $i \in \{1, \ldots, m\}$.
Wówczas:

$$\begin{aligned} & a_{i1}(y_1 + z_1) + a_{i2}(y_2 + z_2) + \ldots + a_{in}(y_n + z_n) \\ & \quad = \quad (a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{in}y_n) + (a_{i1}z_1 + a_{i2}z_2 + \ldots + a_{in}z_n) \\ & \quad = \quad b_i + 0 = b_i, \end{aligned}$$

a zatem $\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \in Sol(\mathcal{U})$ i $\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + U \subset Sol(\mathcal{U})$.