

Izomorfizmy algebr

Przykłady:

1. Działania w grupach często wygodnie jest zapisywać w **tabelkach Cayleya**.

Na przykład tabelka działań w grupie $(\mathbb{Z}_5^*, \otimes_5)$ wygląda następująco:

$\otimes_5$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

2. W naszych rozważaniach nie będziemy ograniczać się tylko do przykładów grup liczbowych.

Jako przykład grupy "nieliczbowej" rozważmy tak zwaną **grupę symetryczną**.

Niech $n \in \mathbb{N}$ i oznaczmy przez $S(n)$ zbiór wszystkich bijekcji zbioru $\{1, \dots, n\}$ na samego siebie.

Na przykład dla $n = 3$ elementy zbioru $S(3)$ to następujące funkcje, które, dla wygody oznaczeń, zdefiniujemy za pomocą tabel:

$$id_3:$$

x	1	2	3
$id_3(x)$	1	2	3

$$o_1:$$

x	1	2	3
$t_1(x)$	2	3	1

$$o_2:$$

x	1	2	3
$t_2(x)$	3	1	2

$$s_1:$$

x	1	2	3
$s_1(x)$	1	3	2

$$s_2:$$

x	1	2	3
$s_2(x)$	3	2	1

$$s_3:$$

x	1	2	3
$s_3(x)$	2	1	3

Tym samym $S(3) = \{id_3, o_1, o_2, s_1, s_2, s_3\}$.

W zbiorze $S(n)$ definiujemy działanie $\circ$ wzorem

$$f \circ g(x) = f(g(x)), \text{ dla } x \in \{1, \dots, n\}.$$

Okazuje się, że algebra $(S(n), \circ)$ jest grupą.

Na przykład tabela działań w grupie $S(3)$ wygląda następująco:

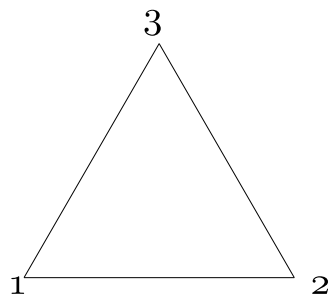
$\circ$	id_3	o_1	o_2	s_1	s_2	s_3
id_3	id_3	o_1	o_2	s_1	s_2	s_3
o_1	o_1	o_2	id_3	s_2	s_3	s_1
o_2	o_2	id_3	o_1	s_3	s_1	s_2
s_1	s_1	s_3	s_2	id_3	o_2	o_1
s_2	s_2	s_1	s_3	o_1	id_3	o_2
s_3	s_3	s_2	s_1	o_2	o_1	id_3

Widzimy, że jest to przykład grupy nieprzemiennej: $s_1 \circ o_1 = s_2$, ale $o_1 \circ s_1 = s_3$.

3. Innym przykładem grupy "nieliczbowej" jest **grupa izometrii własnych n -kąta foremnego**, którą będziemy oznaczać przez $D(n)$.

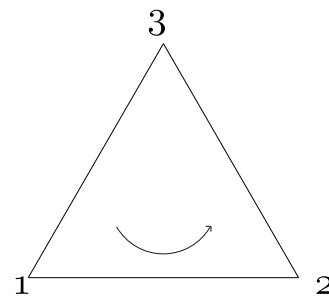
Na przykład dla $n = 3$ grupa $D(3)$ składa się z następujących izometrii trójkąta równobocznego:

$ID_3 :$



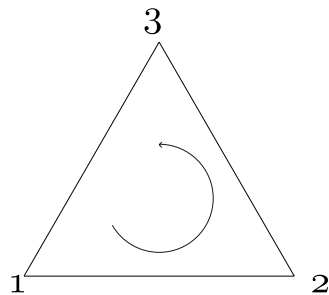
identyczność

$O_1 :$



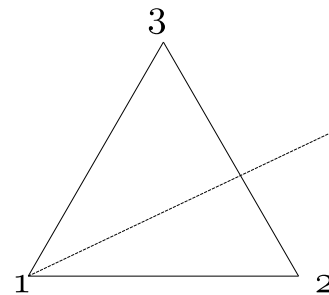
obrót o 120°

$O_2 :$



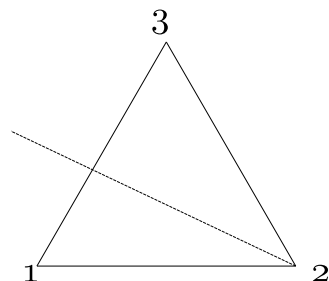
obrót o 240°

$S_1 :$



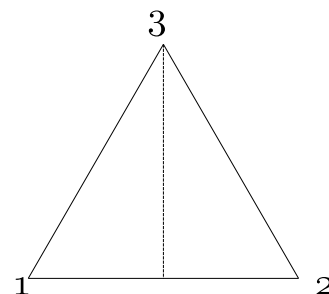
symetria względem
symetralnej przechodzącej
przez wierzchołek 1

$S_2 :$



symetria względem
symetralnej przechodzącej
przez wierzchołek 2

$S_3 :$



symetria względem
symetralnej przechodzącej
przez wierzchołek 3

Działaniem grupowym jest składanie izometrii.

Na przykład tabelka działań w grupie $D(3)$ wygląda następująco:

$\circ$	ID_3	O_1	O_2	S_1	S_2	S_3
ID_3	ID_3	O_1	O_2	S_1	S_2	S_3
O_1	O_1	O_2	ID_3	S_2	S_3	S_1
O_2	O_2	ID_3	O_1	S_3	S_1	S_2
S_1	S_1	S_3	S_2	ID_3	O_2	O_1
S_2	S_2	S_1	S_3	O_1	ID_3	O_2
S_3	S_3	S_2	S_1	O_2	O_1	ID_3

Tak jak w poprzednim przykładzie, grupy $D(n)$ nie są przemienne.

Definicja:

Niech $(G_1, *_1)$ i $(G_2, *_2)$ będą grupami. Funkcję $f : G_1 \rightarrow G_2$ nazywamy **izomorfizmem grup**, jeżeli jest bijekcją i spełniony jest warunek

$$\forall x, y \in G_1 [f(x *_1 y) = f(x) *_2 f(y)].$$

Jeżeli istnieje izomorfizm $f : G_1 \rightarrow G_2$, to grupy G_1 i G_2 nazywamy **izomorficznymi**, co oznaczamy przez $G_1 \cong G_2$.

Przykład:

4. Grupy $S(3)$ i $D(3)$ są izomorficzne.

Istotnie, rozważmy funkcję $f : S(3) \rightarrow D(3)$, którą, dla wygody oznaczeń, zdefiniujemy tabelką jako:

σ	id_3	o_1	o_2	s_1	s_2	s_3
$f(\sigma)$	ID_3	O_1	O_2	S_1	S_2	S_3

Oczywiście jest to bijekcja.

Porównując tabelki działań w $S(3)$ i $D(3)$ widzimy, że jest to też izomorfizm grup.

Definicja:

Niech $(R_1, +_1, \cdot_1)$ i $(R_2, +_2, \cdot_2)$ będą pierścieniami. Funkcję $f : R_1 \rightarrow R_2$ nazywamy **izomorfizmem pierścieni**, jeżeli jest bijekcją i spełnione są warunki:

- ▶ $\forall x, y \in R_1 [f(x +_1 y) = f(x) +_2 f(y)],$
- ▶ $\forall x, y \in R_1 [f(x \cdot_1 y) = f(x) \cdot_2 f(y)],$
- ▶ $f(1_{R_1}) = 1_{R_2},$

gdzie 1_{R_1} oznacza jedynkę pierścienia R_1 , a 1_{R_2} jedynkę pierścienia R_2 . Jeżeli istnieje izomorfizm $f : R_1 \rightarrow R_2$, to pierścienie R_1 i R_2 nazywamy **izomorficznymi**, co oznaczamy przez $R_1 \cong R_2$.

Definicja:

Niech $(F_1, +_1, \cdot_1)$ i $(F_2, +_2, \cdot_2)$ będą ciałami. Funkcję $f : F_1 \rightarrow F_2$ nazywamy **izomorfizmem ciał**, jeżeli jest bijekcją i spełnione są warunki:

- ▶ $\forall x, y \in F_1 [f(x +_1 y) = f(x) +_2 f(y)],$
- ▶ $\forall x, y \in F_1 [f(x \cdot_1 y) = f(x) \cdot_2 f(y)],$
- ▶ $f(1_{F_1}) = 1_{F_2},$

gdzie 1_{F_1} oznacza jedynekę ciała F_1 , a 1_{F_2} jedynekę ciała F_2 . Jeżeli istnieje izomorfizm $f : F_1 \rightarrow F_2$, to ciała F_1 i F_2 nazywamy **izomorficznymi**, co oznaczamy przez $F_1 \cong F_2$.

Ciało liczb zespolonych

Twierdzenie:

Niech $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. W zbiorze $\mathbb{C}$ określamy dodawanie:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

oraz mnożenie:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Wówczas $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ jest ciałem, w którym elementem neutralnym dodawania jest $(0, 0)$, a elementem neutralnym mnożenia jest $(1, 0)$.

Dowód:

Pokażemy dla przykładu, że każdy $\neq (0, 0)$ element ma element odwrotny względem mnożenia.

Niech $(0, 0) \neq (a, b) \in \mathbb{C}$.

Rozważmy element:

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right) \in \mathbb{C}.$$

Wówczas

$$(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right) = \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, \frac{ab - ab}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0).$$

Definicja:

Ciało $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ nazywamy **ciałem liczb zespolonych**.

Zwyczajowo piszemy $a + ib$ zamiast (a, b) oraz a zamiast $(a, 0)$.

Liczbę a nazywamy **częścią rzeczywistą** liczby $a + bi$ i oznaczamy $\Re(a + bi)$.

Liczbę b nazywamy **częścią urojoną** liczby $a + bi$ i oznaczamy $\Im(a + bi)$.

Przykłady:

1. Sprawdzamy, że:

$$(1 - i) + (4 + 7i) = 5 + 6i,$$

$$(-1 + 3i) \cdot (2 - 5i) =$$

$$((-1) \cdot 2 - 3 \cdot (-5)) + ((-1) \cdot (-5) + 3 \cdot 2)i = 13 + 11i,$$

$$\frac{-1+3i}{2+5i} = (-1 + 3i) \cdot (2 + 5i)^{-1} = (-1 + 3i) \cdot \left(\frac{-1}{29} + \frac{-3}{29}i\right) = \frac{10}{29}.$$

2. Podobnie sprawdzamy, że $i \cdot i = -1$.

Uwaga:

Ponieważ, jak zauważyliśmy, $i \cdot i = -1$, intuicyjnie przyjmujemy $\sqrt{-1} = i$.

Definicja:

Niech $z = a + bi \in \mathbb{C}$.

Liczbą sprzężoną z liczbą z nazywamy liczbę $\bar{z} = a - bi$.

Przykład:

3. Wprost z definicji widzimy, że $\overline{1 + 2i} = 1 - 2i$.

Twierdzenie:

Niech $z, w \in \mathbb{C}$. Wówczas:

1. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w},$

2. $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w},$

3. $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w},$

4. $\overline{\frac{z}{w}} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}},$ o ile $w \neq 0$.

Dowód:

Pokażemy dla przykładu własność (4).

Niech $z = a + bi$, $w = c + di$.

Wówczas

$$\frac{z}{w} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{ca + bd}{c^2 + d^2} + \frac{cb - ad}{c^2 + d^2}i,$$

skąd

$$\overline{\frac{z}{w}} = \frac{ca + bd}{c^2 + d^2} - \frac{cb - ad}{c^2 + d^2}i.$$

Z drugiej strony

$$\frac{\bar{z}}{\bar{w}} = \frac{a - bi}{c - di} = \frac{(a - bi)(c + di)}{c^2 + d^2} = \frac{ca + bd}{c^2 + d^2} - \frac{cb - ad}{c^2 + d^2}i.$$

Definicja:

Niech $z = a + bi \in \mathbb{C}$.

Wartością bezwzględną (albo **modułem**) liczby z nazywamy liczbę rzeczywistą $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Przykład:

4. Wprost z definicji widzimy, że $|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Twierdzenie:

Niech $z, w \in \mathbb{C}$. Wówczas:

1. $|z - w|$ = odległość między punktami z i w ,
2. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$,
3. $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

Dowód:

Niech $z = a + bi$, $w = c + di$.

1. Wprost z definicji modułu:

$$|z - w| = |(a - c) + (b - d)i| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2},$$

co, z kolei, jest dokładnie równe odległości między punktami o współrzędnych (a, b) i (c, d) .

2. Podobnie jak w punkcie (1) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} |z \cdot w| &= |(ac - bd) + (ad + bc)i| \\ &= \sqrt{a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2} \\ &= \sqrt{a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2)} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} \\ &= |z| \cdot |w|. \end{aligned}$$

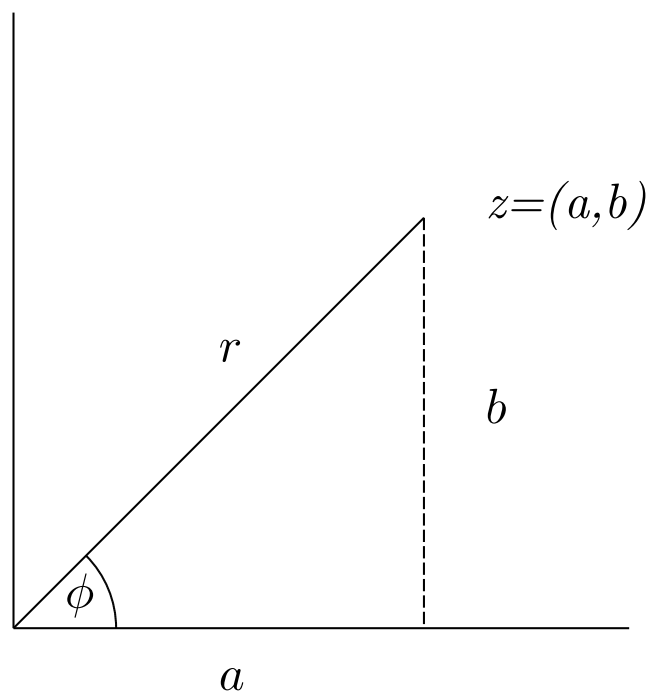
3. Podobnie jak w poprzednich punktach:

$$|z|^2 = a^2 + b^2 = (a + bi) \cdot (a - bi) = z \cdot \bar{z}.$$

Definicja:

Niech $z = a + bi \in \mathbb{C}$.

Niech (r, ϕ) będą takimi liczbami, że $a = r \cos \phi$, $b = r \sin \phi$:



(tj. niech (r, ϕ) będą współrzędnymi biegunowymi punktu (a, b)),
a więc niech

$$z = r \cos \phi + ir \sin \phi = r(\cos \phi + i \sin \phi).$$

Przedstawienie to nazywamy **postacią trygonometryczną** z .

Kąt skierowany ϕ nazywamy **argumentem** z i oznaczamy $\arg(z)$.

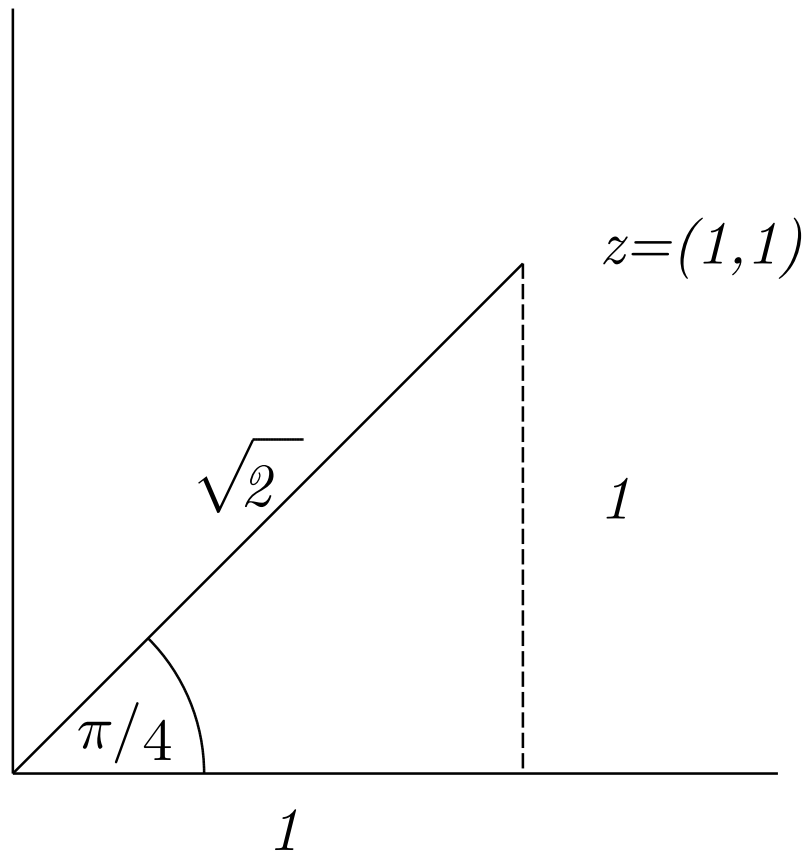
Kąt skierowany $\theta \in [0, 2\pi)$ taki, że

$$\cos \theta = \cos \arg(z) \text{ i } \sin \theta = \sin \arg(z)$$

nazywamy **argumentem głównym** liczby z i oznaczamy $\text{Arg}(z)$.

Przykłady:

5. Rozważmy liczbę $z = 1 + i$, czyli punkt o współrzędnych $(1, 1)$ na płaszczyźnie zespolonej:



Z rysunku łatwo odczytujemy, że $r = \sqrt{2}$, zaś przykładowa wartość kąta ϕ to $\frac{\pi}{4}$.

W szczególności argument główny liczby $z = 1 + i$ to $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}$. Argumentami $\arg(z)$ tej liczby mogą też być, na przykład, liczby $\frac{9\pi}{4}$, $\frac{17\pi}{4}$, $\frac{25\pi}{4}$ itd. jako że

$$\sin \frac{\pi}{4} = \sin \frac{9\pi}{4} = \sin \frac{17\pi}{4} = \sin \frac{25\pi}{4}$$

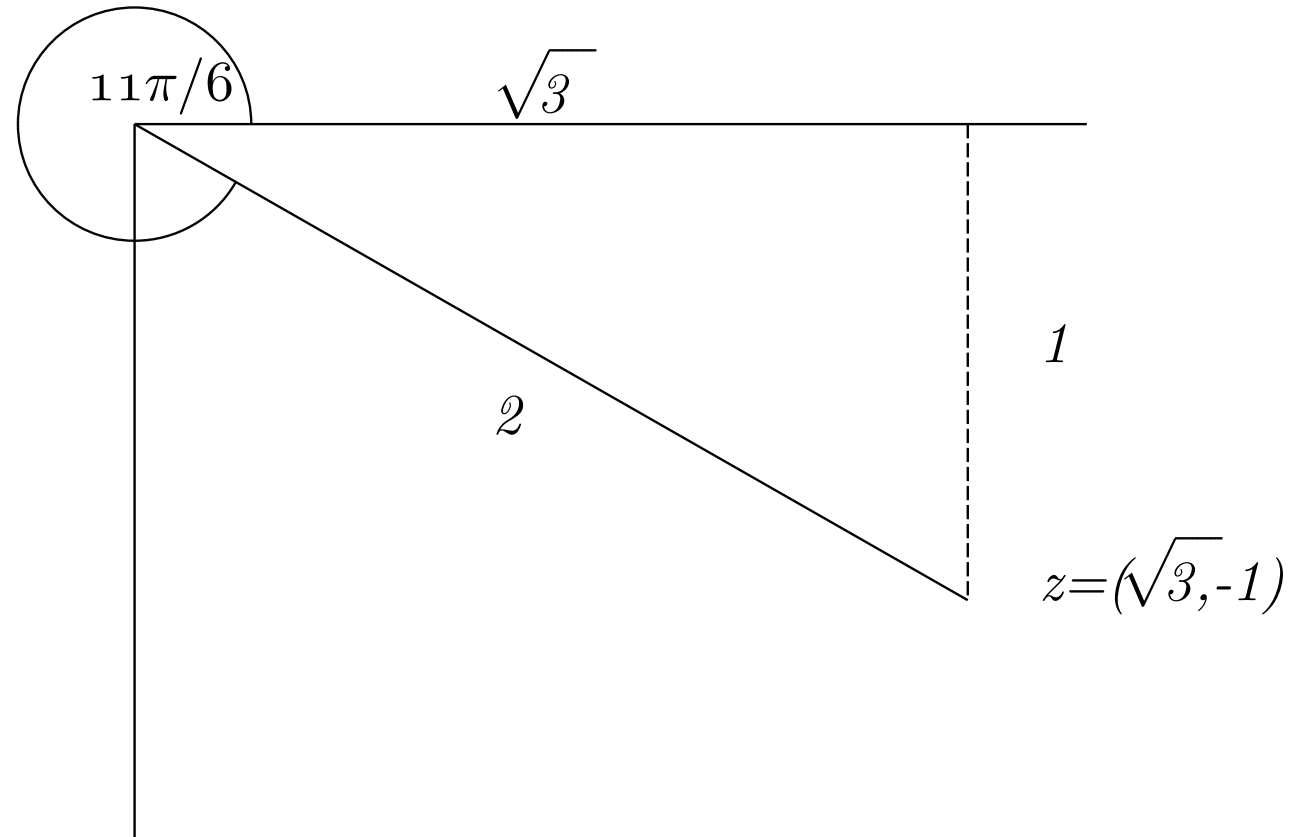
i równocześnie

$$\cos \frac{\pi}{4} = \cos \frac{9\pi}{4} = \cos \frac{17\pi}{4} = \cos \frac{25\pi}{4}.$$

Tym samym przykładowe postaci trygonometryczne liczby $z = 1 + i$ to

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{9\pi}{4} + i \sin \frac{9\pi}{4} \right) = \dots$$

6. Rozważmy liczbę $z = \sqrt{3} - i$, czyli punkt o współrzędnych $(\sqrt{3}, -1)$ na płaszczyźnie zespolonej:



Z rysunku łatwo odczytujemy, że $r = 2$, zaś przykładowa wartość kąta ϕ to $\frac{11\pi}{6}$.

W szczególności argument główny liczby $z = \sqrt{3} - i$ to

$$\text{Arg}(z) = \frac{11\pi}{6}.$$

Argumentami $\arg(z)$ tej liczby mogą też być, na przykład, liczby $\frac{23\pi}{6}$, $\frac{35\pi}{6}$, $\frac{47\pi}{6}$ itd. jako że

$$\sin \frac{11\pi}{6} = \sin \frac{23\pi}{6} = \sin \frac{35\pi}{6} = \sin \frac{47\pi}{6}$$

i równocześnie

$$\cos \frac{11\pi}{6} = \cos \frac{23\pi}{6} = \cos \frac{35\pi}{6} = \cos \frac{47\pi}{6}.$$

Tym samym przykładowe postaci trygonometryczne liczby $z = \sqrt{3} - i$ to

$$z = 2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) = 2 \left(\cos \frac{23\pi}{6} + i \sin \frac{23\pi}{6} \right) = \dots$$

Twierdzenie:

Niech $z_1 = r_1(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2) \in \mathbb{C}$.

Wówczas:

1. $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2)],$
2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\phi_1 - \phi_2) + i \sin(\phi_1 - \phi_2)],$ o ile $z_2 \neq 0,$
3. $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{r_1} (\cos \phi_1 - i \sin \phi_1),$ o ile $z_1 \neq 0.$

Dowód:

Wzory te wynikają wprost ze wzorów na sumy i różnice funkcji trygonometrycznych znane ze szkoły średniej.

Udowodnimy dla przykładu własność (1):

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 [(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1)(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2)] \\ &= r_1 r_2 [(\cos \phi_1 \cos \phi_2 - \sin \phi_1 \sin \phi_2)] \\ &\quad + i(\cos \phi_1 \sin \phi_2 + \sin \phi_1 \cos \phi_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2)]. \end{aligned}$$

Przykład:

7. Rozważmy postać trygonometryczną liczby $(1 + i)(\sqrt{3} - i)$.
W poprzednich przykładach sprawdziliśmy, że

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

oraz

$$\sqrt{3} - i = 2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right).$$

Wobec tego postać trygonometryczna liczby $(1 + i)(\sqrt{3} - i)$ to:

$$2\sqrt{2} \left(\cos \frac{25\pi}{12} + i \sin \frac{25\pi}{12} \right).$$

Zauważmy przy tym, że

$$\frac{25\pi}{12} = \frac{24\pi}{12} + \frac{\pi}{12} = 2\pi + \frac{\pi}{12}$$

wobec czego

$$\cos \frac{24\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{12} \text{ oraz } \sin \frac{24\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12}$$

i liczbę $(1 + i)(\sqrt{3} - i)$ możemy też zapisać jako

$$(1 + i)(\sqrt{3} - i) = 2\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}).$$

Tym samym posługując się postacią trygonometryczną liczb zespolonych możemy wyznaczyć dokładne wartości funkcji trygonometrycznych kąta $\frac{\pi}{12}$. Istotnie:

$$\begin{aligned}(1 + i)(\sqrt{3} - i) &= (\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1)i \\&= 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}i \right) \\&= 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}i \right),\end{aligned}$$

co po porównaniu z postacią trygonometryczną liczby $(1 + i)(\sqrt{3} - i)$ daje

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ oraz } \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Wniosek (wzory de Moivre'a):

Niech $z = r(\cos \phi + i \sin \phi) \in \mathbb{C}$, niech $n \in \mathbb{N}$.
Wówczas $z^n = r^n(\cos n\phi + i \sin n\phi)$.

Przykład:

8. Przy pomocy wzorów de Moivre'a potęgowanie potrafi być naprawdę szybkie.

Obliczmy dla przykładu $(1 + i)^{10}$.

Sprawdziliśmy już, że

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Wobec tego

$$(1 + i)^{10} = 32 \left(\cos \frac{10\pi}{4} + i \sin \frac{10\pi}{4} \right).$$

Ale z drugiej strony

$$\frac{10\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{2}$$

i wobec tego

$$\cos \frac{10\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{2} \text{ oraz } \sin \frac{10\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{2}$$

i liczbę $(1 + i)^{10}$ możemy zapisać jako

$$(1 + i)^{10} = 32 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 32(0 + 1i) = 32i.$$

Twierdzenie:

Niech $z = r(\cos \phi + i \sin \phi) \in \mathbb{C}$, niech $n \in \mathbb{N}$.

Wówczas z ma n różnych pierwiastków stopnia n danych wzorem

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\phi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\phi + 2k\pi}{n} \right),$$

gdzie $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Dowód:

Niech $w \in \mathbb{C}$ będzie taką liczbą, że $w^n = z$ i niech

$$w = s(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Wówczas $s^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = r(\cos \phi + i \sin \phi)$, skąd $s = \sqrt[n]{r}$ oraz

$$\cos n\theta = \cos \phi \text{ i } \sin n\theta = \sin \phi.$$

Tym samym, wobec okresowości funkcji $\cos$ i $\sin$

$$n\theta = \phi + 2k\pi, \text{ dla } k \in \mathbb{N},$$

a więc $\theta = \frac{\phi + 2k\pi}{n}$, dla $k \in \mathbb{N}$.

Zauważmy jednak, że dla $k \geq n$:

$$\frac{\phi + 2k\pi}{n} = \frac{\phi + 2(n + \ell)\pi}{n} = \frac{\phi + 2n\pi + 2\ell\pi}{n} = 2\pi + \frac{\phi + 2\ell\pi}{n},$$

skąd

$$\cos \frac{\phi + 2k\pi}{n} = \cos \frac{\phi + 2\ell\pi}{n} \text{ i } \sin \frac{\phi + 2k\pi}{n} = \sin \frac{\phi + 2\ell\pi}{n}.$$

Wobec tego otrzymujemy tylko n różnych liczb i wystarczy rozpatrywać $k \in \{0, \dots, n - 1\}$.

Przykład:

9. Wyznamy wszystkie pierwiastki stopnia 6 z liczby -2 .
Sprawdzamy, że

$$-2 = 2(-1 + 0i) = 2(\cos \pi + i \sin \pi).$$

Wobec tego pierwiastki stopnia 6 z -2 wyrażą się następującymi wzorami:

$$w_0 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt[6]{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{3\pi}{6} + i \sin \frac{3\pi}{6} \right) = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \sqrt[6]{2} (0 + i1) = \sqrt[6]{2} i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_2 &= \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) \\
 &= \sqrt[6]{2} \left[\cos \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) \right] \\
 &= \sqrt[6]{2} \left(-\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt[6]{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_3 &= \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) \\
 &= \sqrt[6]{2} \left[\cos \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) \right] \\
 &= \sqrt[6]{2} \left(-\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt[6]{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_4 &= \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{9\pi}{6} + i \sin \frac{9\pi}{6} \right) \\
&= \sqrt[6]{2} [\cos (2\pi + \pi) + i \sin (2\pi + \pi)] \\
&= \sqrt[6]{2} (\cos \pi + i \sin \pi) = \sqrt[6]{2} (-1 + i0) = -\sqrt[6]{2} \\
w_5 &= \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) \\
&= \sqrt[6]{2} \left[\cos \left(2\pi - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{6} \right) \right] \\
&= \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt[6]{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right).
\end{aligned}$$

$$\cos(\phi_1 + \phi_2) = \cos \phi_1 \cos \phi_2 - \sin \phi_1 \sin \phi_2$$

$$\sin(\phi_1 + \phi_2) = \cos \phi_1 \sin \phi_2 + \sin \phi_1 \cos \phi_2$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

Układy równań liniowych

Definicja:

Niech F będzie ciałem.

Układem m równań liniowych o niewiadomych $x_1, \dots, x_n$, $m, n \in \mathbb{N}$, o współczynnikach z ciała F nazywamy układ równań postaci:

$$\mathcal{U} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

gdzie $a_{ij}, b_j \in F$, $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$.

Układ ten nazywamy **jednorodnym**, gdy $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$.

Definicja:

Niech F będzie ciałem.

Wielomian $f \in F[x_1, \dots, x_n]$ nazywamy **formą stopnia m** , gdy jest sumą jednomianów stopnia m lub wielomianem zerowym.

Zbiór form stopnia m z pierścienia $F[x_1, \dots, x_n]$ będziemy oznaczali przez $F_h[x_1, \dots, x_n]_m$.

Formy stopnia 1 będziemy nazywali **formami liniowymi**.

Formy stopnia 2 będziemy nazywami **formami kwadratowymi**.

Uwaga:

Niech F będzie ciałem, niech $\mathcal{U}$ będzie układem m równań liniowych o n niewiadomych i współczynnikach z F .

Lewe strony równań należących do $\mathcal{U}$ są formami liniowymi ze zbioru $F_h[x_1, \dots, x_n]_1$, a prawe elementami ciała F .

Definicja:

Niech F będzie ciałem, niech

$$\mathcal{U} : \begin{cases} l_1 = b_1 \\ l_2 = b_2 \\ \vdots \\ l_m = b_m \end{cases}$$

będzie układem równań liniowych, $l_1, \dots, l_m \in F_h[x_1, \dots, x_n]_1$,
 $b_1, \dots, b_m \in F$.

Każde równanie liniowe:

$$a_1 l_1 + a_2 l_2 + \dots + a_m l_m = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_m b_m,$$

gdzie $a_1, \dots, a_m \in F$, nazywamy **kombinacją liniową** równań danego układu.

Rozwiązaniem układu $\mathcal{U}$ nazywamy każdy taki ciąg $(a_1, \dots, a_n)$ elementów ciała F , że

$$l_i(a_1, \dots, a_n) = b_i,$$

dla $i \in \{1, \dots, m\}$.

Uwaga:

Każde rozwiązanie układu równań liniowych jest rozwiązaniem każdego równania będącego kombinacją liniową równań tego układu.

Definicja:

Dwa układy równań $\mathcal{U}_1$ i $\mathcal{U}_2$ nazywamy **równoważnymi** gdy każde równanie układu $\mathcal{U}_1$ jest kombinacją liniową równań układu $\mathcal{U}_2$ i vice versa.

Uwaga:

Równoważne układy równań mają identyczne zbiory rozwiązań.

Definicja:

Układ równań nazywamy **sprzecznym** gdy równanie $0 = 1$ jest kombinacją liniową równań tego układu.

Wniosek:

Sprzeczny układ równań nie ma rozwiązań.

Rozważmy układ równań:

$$\mathcal{U} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Podamy metodę rozwiązywania tego układu przez **eliminację Gaussa**.

Etap I sprowadzenie do **postaci trójkątnej**.

Wybieramy równanie i niewiadomą o niezerowym współczynniku i nazywamy ją **niewiadomą bazową** 1 kroku.

Założmy, że jest nią x_1 ze współczynnikiem $a_{11} \neq 0$.
Mnożymy wybrane równanie (u nas równanie pierwsze) przez $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ i odejmujemy od drugiego równania.

Postępując indukcyjnie mnożymy wybrane równanie przez $\frac{a_{1i}}{a_{11}}$ i odejmujemy od i -tego równania, $i \in \{2, \dots, m\}$.

Następnie przechodzimy do kroku 2, w którym wybieramy równanie spośród $i \in \{2, \dots, m\}$, niewiadomą bazową drugiego kroku i powtarzamy procedurę dla równań $i \in \{3, \dots, m\}$.

Na koniec tego etapu układ zostaje przekształcony do postaci

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad \widetilde{a}_{22}x_2 + \widetilde{a}_{23}x_3 + \dots + \widetilde{a}_{2n}x_n = \widetilde{b}_2 \\ \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \quad \quad \widetilde{a}_{rr}x_r + \dots + \widetilde{a}_{rn}x_n = \widetilde{b}_r. \end{array} \right.$$

$x_1, \dots, x_r$ zostały wybrane jako niewiadome bazowe, a $x_{r+1}, \dots, x_n$ pozostają jako **parametry**.

Etap II sprowadzenie do **postaci diagonalnej**.

W ostatnim równaniu (u nas r) wybieramy niewiadomą bazową, powiedzmy x_r , i eliminujemy z równań $i \in \{1, \dots, r-1\}$ odejmując równanie r od i po wcześniejszym pomnożeniu przez $\frac{\widetilde{a_{ir}}}{a_{rr}}$.

Następnie postępujemy indukcyjnie z równaniami $i \in \{1, \dots, r-2\}$.

Na koniec tego etapu układ zostaje przekształcony do postaci

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_{11}x_1 & + \overline{a_{1,r+1}}x_{r+1} + \overline{a_{1,r+2}}x_{r+2} + \dots + \overline{a_{1n}} \\ & \widetilde{a_{22}}x_2 & + \overline{a_{2,r+1}}x_{r+1} + \overline{a_{2,r+2}}x_{r+2} + \dots + \overline{a_{2n}} \\ & & \vdots \\ & \widetilde{a_{rr}}x_r & + \overline{a_{r,r+1}}x_{r+1} + \overline{a_{r,r+2}}x_{r+2} + \dots + \overline{a_{rn}} \end{array} \right.$$

Etap III zapisujemy rozwiązanie przenosząc parametry na prawą stronę i dzieląc przez współczynniki przy $x_1, \dots, x_r$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & \frac{\overline{b_1}}{\overline{a_{11}}} - \frac{\overline{a_{1,r+1}}}{\overline{a_{11}}} x_{r+1} - \dots - \frac{\overline{a_{1n}}}{\overline{a_{11}}} x_n \\ x_2 & = & \frac{\overline{b_2}}{\widetilde{a_{22}}} - \frac{\widetilde{a_{2,r+1}}}{\widetilde{a_{22}}} x_{r+1} - \dots - \frac{\widetilde{a_{2n}}}{\widetilde{a_{22}}} x_n \\ & \vdots & \\ x_r & = & \frac{\widetilde{b_r}}{\widetilde{a_{rr}}} - \frac{\widetilde{a_{r,r+1}}}{\widetilde{a_{rr}}} x_{r+1} - \dots - \frac{\widetilde{a_{rn}}}{\widetilde{a_{rr}}} x_n. \end{array} \right.$$

Przykład:

1. Rozważmy układ:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6 \end{cases}$$

o współczynnikach z ciała $\mathbb{Q}$.

Uwaga:

Chcąc zaoszczędzić czas układy równań zapisujemy jako **macierze**, czyli prostokątne tabliczki liczb, które są odpowiednimi współczynnikami w odpowiednich równaniach.

Przykłady:

2. Rozważmy układ:

$$\begin{cases} x + 4y + 2z + 5t = 0 \\ 2x + y + z + 4t = 0 \\ 3x + 5y + 3z + 2t = 0 \\ x + 4y + 4z + 2t = 0 \end{cases}$$

o współczynnikach z ciała $\mathbb{Z}_7$.

3. Rozważmy układ równań:

$$\begin{cases} (-2 - 4i)x + (-2 - 6i)y + (3 + 4i)z + (-2 - i)t = 0 \\ 2ix - 2iy + z - t = 0 \end{cases}$$

o współczynnikach z ciała $\mathbb{C}$.