

Zestaw zadań 8: pojęcie pierścienia, podpierścienie, podpierścienie generowane przez zbiory.

- (1) Sprawdzić, że dany zbiór ze zwykłym dodawaniem i mnożeniem liczb jest pierścieniem przemennym:
 - (a) $\mathbb{R}$
 - (b) $\mathbb{Z}$
 - (c) $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$
 - (d) $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$
 - (e) $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}] = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} : a, b, c \in \mathbb{Z}\}$
 - (f) $\mathbb{Z}[\varepsilon] = \{a_0 + a_1\varepsilon + \dots + a_{n-1}\varepsilon \in \mathbb{C} : a_i \in \mathbb{Z} \text{ dla } i = 1, \dots, n-1\}$, gdzie $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$
 - (g) $\mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : a, b \in \mathbb{Z}, \text{NWD}(a, b) = 1 \text{ \& } p \nmid b\}$, gdzie p jest liczbą pierwszą.
- (2) Wykazać, że system $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ gdzie $\forall a, b \in \mathbb{Z} : a \oplus b = a + b - 1, a \odot b = a + b - ab$, jest pierścieniem przemiennym z jedyneką.
- (3) Niech $P_i = (P_i, +, \cdot, 0, 1), i = 1, \dots, n$ będą pierścieniami przemiennymi z jedynekami. Wykazać, że zbiór $P_1 \times \dots \times P_n$ z działaniami określonymi po współrzędnych jest pierścieniem przemiennym z jedyneką.
- (4) (a) Niech P będzie pierścieniem przemiennym z jedyneką oraz X zbiorem niepustym. Wykazać, że zbiór P^X wszystkich funkcji odwzorowujących X w P z dodawaniem i mnożeniem określonymi wzorami : $(f+g)(x) = f(x)+g(x), (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), x \in X$, jest pierścieniem przemiennym z jedyneką.
 (b) Niech X będzie zbiorem niepustym oraz $\mathcal{P}(X)$ będzie rodziną wszystkich podzbiorów zbioru X . Udowodnić, że system $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$, gdzie Δ oznacza różnicę symetryczną zbiorów $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, jest pierścieniem przemiennym z jedyneką.
- (5) Wykazać, że zbiór $M(n, \mathbb{R})$ wszystkich macierzy kwadratowych stopnia n nad ciałem liczb rzeczywistych z dodawaniem i mnożeniem macierzy jest pierścieniem z jedyneką.
- (6) Niech $P = (P, +, \cdot, 0, 1)$ będzie niezerowym pierścieniem przemiennym z jedyneką oraz $a, b, c \in P$. Wykazać, że:
 - (a) $a \cdot 0 = 0$,
 - (b) $a \cdot (-b) = -ab$,
 - (c) $1 \neq 0$,
 - (d) $(-a)(-b) = ab$,
 - (e) $a(b - c) = ab - ac$.
- (7) Zbadać, czy zbiór P jest podpierścieniem pierścienia R , jeśli:
 - (a) $P = \mathbb{Z}_{(5)}, R = \mathbb{Q}$;
 - (b) $P = \mathbb{Z}^{\mathbb{R}}, R = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$;
 - (c) $P = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in M(2, \mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}, R = M(2, \mathbb{R})$.
- (8) Udowodnić równość $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] = \{\frac{m}{2^k} \in \mathbb{Q} : m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$.