

Zestaw zadań 7: grupy permutacji

- (1) Dla permutacji $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ i $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} \in S(6)$ wyznaczyć:
- (a) $\tau\sigma$,
 - (b) $\sigma\tau$,
 - (c) $\sigma\tau\sigma^{-1}$,
 - (d) $\langle\sigma\rangle$,
 - (e) $\langle\tau\sigma\rangle$,
 - (f) rozwiązanie w grupie $S(6)$ równania $\tau^{-1}X\sigma = \tau^2$.
- (2) Dany cykl $\sigma \in S(6)$ zapisać w postaci dwuwierszowej:
- (a) $\sigma = (4, 2, 5)$,
 - (b) $\sigma = (3, 5, 4, 2, 1, 6)$.
- (3) Daną permutację $\sigma \in S(9)$ przedstawić w postaci iloczynu cykli rozłącznych, a następnie przedstawić w postaci iloczynu transpozycji i sprawdzić czy σ jest parzysta czy nieparzysta :
- (a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 9 & 2 & 7 & 6 & 4 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,
 - (b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 4 & 7 & 9 & 3 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$,
 - (c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 2 & 6 & 9 & 5 & 4 & 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$,
 - (d) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 9 & 2 & 8 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.
- (4) Udowodnić, że
- (a) jeżeli σ jest cyklem o długości k , to $r(\sigma) = k$,
 - (b) jeżeli permutacja σ jest iloczynem m cykli rozłącznych o długościach $k_1, \dots, k_m$, to $r(\sigma) = \text{NWW}(k_1, \dots, k_m)$.
- (5) Obliczyć rzędy permutacji σ, τ z poprzednich zadań.
- (6) Wykazać, że :
- (a) zbiory $\mathcal{A} = \{(1, 2), (1, 3), \dots, (1, n)\}$, $\mathcal{B} = \{(1, 2, \dots, n-1), (n-1, n)\}$ generują grupę $S(n)$.
 - (b) zbiory $\mathcal{C} =$ zbiór wszystkich cykli długości 3, $\mathcal{D} = \{(1, 2, 3), (1, 2, 4), \dots, (1, 2, n)\}$ generują grupę $A(n)$.