

Zestaw zadań 6: grupa ilorazowa, twierdzenie o homomorfizmie

- (1) Opisać elementy grupy ilorazowej G/H oraz ułożyć tabelkę działania w tej grupie, jeżeli:
 - (a) $G = \mathbb{Z}$, $H = 5\mathbb{Z}$,
 - (b) $G = \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{21})$, $H = \{1, 8, 13, 20\}$,
 - (c) $G = Gl(2, \mathbb{Z}_3)$, $H = Sl(2, \mathbb{Z}_3)$,
 - (d) $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, $H = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.
- (2) Udowodnić izomorfizmy grup :
 - (a) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$,
 - (b) $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^+ \cong \{1, -1\}$,
 - (c) $\mathbb{C}/\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$,
 - (d) $\mathbb{R}^*/\{1, -1\} \cong \mathbb{R}^+$,
 - (e) $\mathbb{C}^*/\mathbb{C}_1 \cong \mathbb{R}^+$,
 - (f) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong \mu_\infty(\mathbb{C})$,
 - (g) $Gl(n, K)/Sl(n, K) \cong K^*$,
 - (h) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\{0\} \times \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$,
 - (i) $\mathbb{R}^3/H \cong \mathbb{R}^2$, gdzie $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y = x - z = 0\}$.
- (3) Niech $H_i \triangleleft G_i$ dla $i = 1, 2$. Wykazać, że $H_1 \times H_2 \triangleleft G_1 \times G_2$ oraz $G_1 \times G_2 / H_1 \times H_2 \cong G_1 / H_1 \times G_2 / H_2$.
- (4) Niech X będzie zbiorem niepustym. Wykazać, że jeśli $H \triangleleft G$, to $H^X \triangleleft G^X$ i $G^X / H^X \cong (G/H)^X$.
- (5) Niech $\varphi : G \rightarrow F$ będzie epimorfizmem grup. Wykazać, że :
 - (a) jeżeli $K \triangleleft F$, to $\varphi^{-1}(K) \triangleleft G$ i $G/\varphi^{-1}(K) \cong F/K$.
 - (b) jeżeli $\ker \varphi \subset H \triangleleft G$, to $\varphi(H) \triangleleft F$ i $G/H \cong F/\varphi(H)$.
- (6) Niech $H \triangleleft G$. Wykazać, że jeśli H oraz G/H są grupami cyklicznymi, to grupa G jest generowana przez dwa elementy.