

Zestaw zadań 5: homomorfizmy grup, podgrupy normalne

- (1) Sprawdzić, że funkcja φ jest homomorfizmem podanych grup. Wyznaczyć jądro $\ker \varphi$ i obraz $\operatorname{im} \varphi$ homomorfizmu φ :
- (a) $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \varphi(a) = na, \quad n \in \mathbb{N},$
 - (b) $\varphi : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad \varphi(z) = |z|,$
 - (c) $\varphi : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, \quad \varphi(x) = x^2,$
 - (d) $\varphi : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad \varphi(z) = z^n, \quad n \in \mathbb{N},$
 - (e) $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \log x,$
 - (f) $\varphi : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow M(n, \mathbb{R}), \quad \varphi(A) = A^T,$
 - (g) $\varphi : \operatorname{Gl}(n, K) \rightarrow K^*, \quad \varphi(A) = \det A,$
 - (h) $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \varphi((a, b)) = a,$
 - (i) $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi((x, y)) = x - y,$
 - (j) $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(z) = \operatorname{Re}(z),$
 - (k) $\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(f) = f(1).$
- (2) Wykazać, że grupy
- (a) $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$,
 - (b) $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{Z}$,
 - (c) $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{Q}^*$,
 - (d) $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^*$,
 - (e) $\mathbb{C}$ i $\mathbb{C}^*$,
 - (f) $\mathbb{R}^+$ i $\mathbb{R}^*$
- nie są izomorficzne.
- (3) Udowodnić, że odwzorowanie $\varphi : G \rightarrow G$,
- (a) $\varphi(a) = a^2,$
 - (b) $\varphi(a) = a^{-1},$
- jest homomorfizmem grup wtedy i tylko wtedy, gdy G jest grupą abelową.
- (4) Wykazać, że odwzorowanie $\varphi : G_1 \times G_2 \rightarrow G_1, \varphi((a, b)) = a$ jest homomorfizmem grup G_1 i G_2 . Wyznaczyć $\ker \varphi$ i $\operatorname{im} \varphi$.
- (5) Udowodnić, że homomorficzny obraz grupy cyklicznej/abelowej jest grupą cykliczną/abelową.
- (6) Niech $\varphi_i : G_i \rightarrow F_i, i = 1, 2$ będą homomorfizmami grup. Wykazać, że odwzorowanie $\phi : G_1 \times G_2 \rightarrow F_1 \times F_2, \phi((a_1, a_2)) = (\varphi_1(a_1), \varphi_2(a_2))$, jest homomorfizmem grup.
- (7) Udowodnić, że $G \times F \cong F \times G$ dla dowolnych grup F i G .
- (8) Wyznaczyć wszystkie podgrupy normalne grupy :
- (a) $S(3),$
 - (b) $D(4),$
 - (c) $\mathbb{Z}_5,$
 - (d) $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{10}),$
 - (e) $\operatorname{Quat}.$
- (9) Wykazać, że
- (a) $\operatorname{Sl}(n, K) \triangleleft \operatorname{Gl}(n, K),$
 - (b) $\{I, -I\} \triangleleft \operatorname{Gl}(n, K),$ gdzie I oznacza macierz jednostkową.
- (10) Udowodnić, że :
- (a) $(G : H) = 2 \implies H \triangleleft G,$
 - (b) $H_i \triangleleft G_i, i = 1, 2 \implies H_1 \times H_2 \triangleleft G_1 \times G_2,$
 - (c) $X \neq \emptyset \wedge H \triangleleft G \implies H^X \triangleleft G^X.$

- (11) Niech $(G, \cdot, 1)$ będzie grupą. Dwa elementy $a, b \in G$ nazywamy sprzężonymi i piszemy $a \sim b$, jeżeli istnieje element $c \in G$ taki, że $a = c^{-1}bc$.
- (a) Wykazać, że relacja $\sim$ jest relacją równoważnościową.
 - (b) Niech H będzie podgrupą G .
Wykazać, że $H \triangleleft G \iff \forall a \in G : a \in H \implies [a]_{\sim} \subset H$.
- (12) Niech $H \triangleleft G, F < G$. Wykazać, że $HF := \{hf : h \in H, f \in F\} < G$ oraz, że $H \triangleleft G \wedge F \triangleleft G \implies HF \triangleleft G$.