

Zestaw zadań 4: rząd elementu grupy, podgrupy cykliczne

- (1) Dla każdego elementu $a \in G$, gdzie
 - (a) $G = D(3)$,
 - (b) $G = D(4)$,
 - (c) $G = \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{10})$,
 - (d) $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$,
 - (e) $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$wyznaczyć wszystkie elementy podgrupy cyklicznej $\langle a \rangle$.
- (2) Niech $\zeta_n = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$. Wykazać, że grupa $\mu_n(\mathbb{C})$ jest grupą cykliczną generowaną przez ζ_n .
- (3) Sprawdzić, które z grup $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n)$ dla $n \in \{2, \dots, 10\}$ są cykliczne.
- (4) Wykazać, że grupa $\mathbb{Q}$ nie posiada skończonego zbioru generatorów, ale każda skończona generowana podgrupa grupy $\mathbb{Q}$ jest cykliczna. Znaleźć generator podgrupy generowanej przez liczby $\frac{1}{3}$ i $\frac{7}{11}$.
- (5) Wyznaczyć rząd każdego elementu grupy:
 - (a) $D(3)$,
 - (b) $D(4)$,
 - (c) $\mathbb{Z}_6$,
 - (d) $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{12})$,
 - (e) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.
- (6) Wykazać, że jeśli $a^2 = 1$ dla każdego $a \in G$, to G jest grupą abelową.
- (7) Grupa skończona jest cykliczna wtedy i tylko wtedy, gdy ma element, którego rząd jest równy rządowi grupy; każda grupa cykliczna jest abelowa. Sprawdzić, że każda grupa rzędu ≤ 5 jest abelowa.
- (8) Niech a, b będą elementami grupy G oraz $m, n \in \mathbb{N}$. Wykazać, że:
 - (a) $r(a) = r(a^{-1})$,
 - (b) $a^m = 1 \Rightarrow r(a) \mid m$,
 - (c) $r(a) = nm \Rightarrow r(a^n) = m$,
 - (d) $r(a) = n \Rightarrow \forall_{m \geq 1} : r(a^m) = \frac{n}{\text{NWD}(n, m)}$,
 - (e) $r(bab^{-1}) = r(a)$.
- (9) Niech G będzie grupą cykliczną rzędu n oraz $k \mid n$. Wykazać, że grupa G zawiera podgrupę rzędu k .
- (10) Niech a, b będą elementami grupy G oraz $r(a) = r(b) = 2$. Pokazać, że $r(ab) = 2 \iff ab = ba$.