

Zestaw zadań 3: warstwy grupy względem podgrupy. Twierdzenie Lagrange'a.

- (1) Wyznaczyć wszystkie warstwy lewostronne i wszystkie warstwy prawostronne
 - (a) grupy $D(3)$ względem podgrupy $H = \{I, S_1\}$,
 - (b) grupy $D(3)$ względem podgrupy obrotów,
 - (c) grupy $D(4)$ względem podgrupy obrotów,
 - (d) grupy $\mathbb{Z}_{12}$ względem podgrupy $H = \{0, 3, 6, 9, \}$,
 - (e) grupy $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{13})$ względem podgrupy $H = \{1, 5, 8, 12\}$,
 - (f) grupy $\mathbb{Q}^*$ względem podgrupy $\mathbb{Q}^+$,
 - (g) grupy $Gl(2, \mathbb{Z}_2)$ względem podgrupy $Sl(2, \mathbb{Z}_2)$.
- (2) Opisać wszystkie warstwy danej grupy względem jej podgrupy :
 - (a) grupy $\mathbb{R}^*$ względem $\mathbb{R}^+$,
 - (b) grupy $\mathbb{C}$ względem $\mathbb{R}$,
 - (c) grupy $Gl(n, \mathbb{R})$ względem $Sl(n, \mathbb{R})$.
- (3) Obliczyć indeksy :
 - (a) $(\mathbb{Z} : n\mathbb{Z})$,
 - (b) $(\mathbb{R}^* : \mathbb{R}^+)$,
 - (c) $(Gl(n, \mathbb{R}) : Sl(n, \mathbb{R}))$,
 - (d) $(\mathbb{Q} : n\mathbb{Q})$,
 - (e) $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$,
 - (f) $(\mathbb{Z}_{15} : \{0, 5, 10\})$,
 - (g) $(Gl(n, \mathbb{R}) : Sl(n, \mathbb{R}))$,
 - (h) wszystkich podgrup grupy $S(3)$ i $\mu_4(\mathbb{C})$.
- (4) Niech H, K będą właściwymi podgrupami grupy skończonej, której rząd jest iloczynem dwóch różnych liczb pierwszych. Wykazać, że $H = K$ lub $H \cap K = \{1\}$.
- (5) Niech H będzie podgrupą grupy multiplikatywnej G o indeksie 2. Wykazać, że podgrupa H zawiera :
 - (a) kwadrat dowolnego elementu grupy G ,
 - (b) iloczyn dwóch dowolnych elementów grupy G nie należących do H .
- (6) Wykazać, że jeżeli H_1 oraz H_2 są podgrupami grupy G oraz istnieją $a, b \in G$ takie, że $aH_1 = bH_2$, to $H_1 = H_2$.