

Zestaw zadań 2: podgrupy, podgrupy generowane przez zbiór.

- (1) Sprawdzić, że grupy $(\mathbb{C}_1, \cdot)$, $(\mu_n(\mathbb{C}), \cdot)$, $(\mu_\infty(\mathbb{C}), \cdot)$, gdzie $\mu_\infty(\mathbb{C}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mu_n(\mathbb{C})$ są podgrupami grupy $(\mathbb{C}^*, \cdot, 1)$.
- (2) Wyznaczyć wszystkie podgrupy grupy :
- (a) $\mathbb{Z}_4$,
 - (b) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$,
 - (c) $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_5)$,
 - (d) $D(3)$,
 - (e) Quat.
- (3) Sprawdzić, że następujące podzbiory są podgrupami grupy $(\mathbb{C}, +, 0)$:
- (a) $\mathbb{Z}$,
 - (b) $\mathbb{R}$,
 - (c) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)\}$,
 - (d) $\mathbb{Z}[D] = \{a + b\sqrt{D} : a, b \in \mathbb{Z}\}$, gdzie D jest ustaloną liczbą całkowitą bezkwadratową.
- (4) Sprawdzić, że podzbiory
- (a) $Sl(n, K)$;
 - (b) $D(n, K) = \{A \in Gl(n, K) : A = [a_{ij}], a_{ij} = 0 \text{ dla } i \neq j\}$;
 - (c) $T(n, K) = \{A \in Gl(n, K) : A = [a_{ij}], a_{ij} = 0 \text{ dla } i > j\}$
- są podgrupami grupy $Gl(n, K)$.
- (5) Niech G_1, G_2 będą grupami. Wykazać, że jeśli $H_1 < G_1$ oraz $H_2 < G_2$, to $H_1 \times H_2 < G_1 \times G_2$.
- (6) Niech G będzie grupą oraz X zbiorem niepustym. Wykazać, że jeśli $H < G$, to $H^X < G^X$.
- (7) Niech H, F będą podgrupami grupy G . Wykazać, że $H \cup F < G \iff H \subseteq F \vee F \subseteq H$.
- (8) Udowodnić, że grupa nie daje się przedstawić w postaci sumy mnogościowej dwóch podgrup właściwych.
- (9) Dla każdej z podanych grup wyznaczyć najmniejszy zbiór generatorów :
- (a) $\mathbb{Z}_6$,
 - (b) $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{10})$,
 - (c) $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_8)$,
 - (d) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$,
 - (e) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$,
 - (f) $D(3)$,
 - (g) $D(4)$,
 - (h) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.