Rozdział 0

Elementarne własności grup

Przykłady grup i izomorfizmów grup

W zadaniach 001-013 zapoznać się z listą przykładów grup i symboliką używaną do ich oznaczania.

001. Grupy liczbowe

(a) $(\mathbb{Z}, +, 0)$, $(\mathbb{Q}, +, 0)$, $(\mathbb{R}, +, 0)$, $(\mathbb{C}, +, 0)$ - addytywne grupy liczb całkowitych, wymiernych, rzeczywistych i zespolonych.

(b) $(\mathbb{Q}^{(p)}, +, 0)$ - addytywna grupa liczb wymiernych p-całkowitych, tzn. liczb wymiernych postaci a/b, gdzie $a,b \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{NWD}(a,b) = 1$, p nie dzieli b, p jest ustaloną liczbą pierwszą.

(c) $(\mathbb{Q}_{(p)}, +, 0)$ - addytywna grupa p-ułamków, tzn. liczb wymiernych postaci a/p^k, gdzie p jest ustaloną liczbą pierwszą $a,k \in \mathbb{Z}$.

(d) $(\mathbb{Q}^*, \cdot, 1)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot, 1)$, $(\mathbb{C}^*, \cdot, 1)$ - multyplikatywne grupy liczb wymiernych, rzeczywistych i zespolonych (różnych od zera).

(e) $(\mathbb{Q}^+, \cdot, 1)$, $(\mathbb{R}^+, \cdot, 1)$ - multyplikatywne grupy liczb wymiernych dodatnich i liczb rzeczywistych dodatnich.

(f) $(\mathbb{C}_1, \cdot, 1)$ - multyplikatywna grupa liczb zespolonych o module 1.

(g) $(\mathbb{C}(n), \cdot, 1)$ - multyplikatywna grupa zespolonych pierwiastków z jedynki stopnia n.

(h) $(\mathbb{C}(\infty), \cdot, 1)$ - multyplikatywna grupa zespolonych pierwiastków z jedynki wszystkich naturalnych stopni.

(i) $(\mathbb{C}(p^{\infty}), \cdot, 1)$ - multyplikatywna grupa zespolonych pierwiastków z jedynki stopni p^n, gdzie p jest ustaloną liczbą pierwszą, zaś n przebiega zbiór liczb naturalnych. (-,-)

<u>002</u>. Grupy reszt

(a) Niech n będzie liczbą naturalną oraz $\mathbb{Z}_n = \{0,1,\dots,n-1\}$. W zbiorze $\mathbb{Z}_n$ określamy działanie $\oplus$ następująco: $a \oplus b$ = reszta z dzielenia liczby $a+b$ przez n. Sprawdzić, że $(\mathbb{Z}_n, \oplus, 0)$ jest grupą abelową. Nazywamy ją addytywną grupą reszt modulo n.

(b) W zbiorze $\mathbb{Z}_n^* = \{k \in \mathbb{Z}_n : NWD(k,n) = 1\}$ określamy działanie $\odot$ następująco: $a \odot b$ = reszta z dzielenia liczby ab przez n. Sprawdzić, że $(\mathbb{Z}_n^*, \odot, 1)$ jest grupą abelową. Nazywamy ją multyplikatywną grupą reszt modulo n (pierwszych względem n). (-,-)

<u>003</u>. Grupy przekształceń

Niech X będzie dowolnym zbiorem niepustym. Niech $S(X)$ oznacza zbiór wszystkich wzajemnie jednoznacznych odwzorowań (bijekcji) zbioru X na X. W zbiorze $S(X)$ określamy działanie $\circ$ następująco: dla $f,g \in S(X)$, $f \circ g : X \longrightarrow X$, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Sprawdzić, że $(S(X), \circ, id_X)$ jest grupą. Jeśli zbiór X ma więcej niż dwa elementy, to grupa $S(X)$ jest nieabelowa. Grupę $S(X)$ nazywamy grupą symetryczną zbioru X. Jeśli $X = \{1,2,\dots,n\}$, to zamiast $S(X)$ piszemy $S(n)$ i grupę tę nazywamy grupą symetryczną stopnia n, a jej elementy nazywamy permutacjami zbioru X. Sprawdzić, że $|S(n)| = n!$. (-,-)

<u>004</u>. Grupy macierzy

Niech K będzie dowolnym ciałem. $M(n,K)$ oznacza zbiór wszystkich macierzy kwadratowych stopnia n o elementach z ciała K. W zbiorze $M(n,K)$ określone są dwa działania: dodawanie macierzy oraz mnożenie macierzy w sposób następujący: $[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$, $[a_{ij}] \cdot [b_{ij}] = [c_{ij}]$, gdzie $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{in}b_{nj}$.

(a) $(M(n,K), +, 0)$ jest grupą abelową.

(b) Niech $GL(n,K) = \{A \in M(n,K)$: istnieje $B \in M(n,K)$, że $AB = I\}$. System $(GL(n,K), \cdot, I)$ jest grupą. Nazywamy ją ogólną grupą liniową stopnia n nad ciałem K (skrót GL z ang. "general linear").

(c) Niech $SL(n,K) = \{A \in M(n,K) : \det A = 1\}$. System $(SL(n,K), \cdot, I)$ jest grupą. Nazywamy ją specjalną grupą liniową stopnia n nad ciałem K (skrót SL z ang. "special linear").

(d) Niech $D(n,K) = \{A \in GL(n,K) : A = [a_{ij}],\ a_{ij} = 0$ dla $i \neq j\}$. System $(D(n,K), \cdot, I)$ jest grupą abelową. Nazywamy ją grupą diagonalną stopnia n nad ciałem K.

(e) Niech $T(n,K) = \{A \in GL(n,K) : A = [a_{ij}],\ a_{ij} = 0$ dla $i > j\}$. System $(T(n,K), \cdot, I)$ jest grupą. Nazywamy ją grupą trójkątną stopnia n nad ciałem K.

(f) Niech $UT(n,K) = \{A \in GL(n,K) : A = [a_{ij}],\ a_{ij} = 0$ dla $i > j$, $a_{ii} = 1$ dla $i = 1,\dots,n\}$. System $(UT(n,K), \cdot, I)$ jest grupą. Nazywamy ją grupą unitrójkątną stopnia n nad ciałem K.

(g) Niech $UT^m(n,K) = \{A \in UT(n,K) : A = [a_{ij}],\ a_{ij} = 0$ dla $j-i \leq m\}$. System $(UT^m(n,K), \cdot, I)$ jest grupą.

(h) Niech $O(n,K) = \{A \in GL(n,K) : A \cdot A^t = I\}$ (t oznacza operację transponowania macierzy). System $(O(n,K), \cdot, I)$ jest grupą. Nazywamy ją grupą ortogonalną stopnia n nad ciałem K. Zauważyć, że $O^+(n,K) = O(n,K) \cap SL(n,K)$ jest podgrupą $O(n,K)$.

(i) Zauważyć, że zamieniając w przykładach (a)-(h) ciało K pierścieniem $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych, otrzymujemy także odpowiednie grupy liniowe stopnia n nad $\mathbb{Z}$. Sprawdzić, że $GL(n,\mathbb{Z}) = \{A \in M(n,\mathbb{Z}) : \det A = \pm 1\}$. (-,-)

<u>005</u>. Grupy przekształceń liniowych i afinicznych

Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem K i niech End V oznacza zbiór wszystkich endomorfizmów przestrzeni V (tzn. przekształceń liniowych V w V). W zbiorze End V określone są dwa działania: dodawanie oraz mnożenie w sposób następujący: dla $f,g \in$ End V, $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$, $(f.g)(v) = f(g(v))$, dla każdego $v \in V$. Symbolem 0 oznaczamy endomorfizm zerowy, tzn. taki, że $0(v) = 0$ dla każdego $v \in V$.

(a) $(\mathrm{End}\ V, +, 0)$ jest grupą abelową.

(b) $\mathrm{Aut}\ V$ oznacza zbiór wszystkich automorfizmów (tzn. odwracalnych endomorfizmów) przestrzeni V. $(\mathrm{Aut}\ V, \cdot, \mathrm{id}_V)$ jest grupą. Zauważyć, że jest to podgrupa $S(V)$.

(c) Niech V będzie skończenie wymiarową zorientowaną przestrzenią rzeczywistą. Wtedy Aut^+V - zbiór automorfizmów przestrzeni V zachowujących orientację - jest podgrupą grupy $\mathrm{Aut}\ V$.

(d) Niech $K^{n,1}$ oznacza przestrzeń wektorową wszystkich n-elementowych ciągów elementów ciała K zapisywanych w postaci macierzy o n wierszach i 1 kolumnie. Niech $Af(n,K)$ będzie zbiorem wszystkich funkcji $f : K^{n,1} \longrightarrow K^{n,1}$ takich, że dla $v \in K^{n,1}$, $f(v) = Av + a$, gdzie $A \in GL(n,K)$, $a \in K^{n,1}$. Wtedy $Af(n,K)$ z działaniem superpozycji funkcji jest grupą. Nazywamy ją grupą afiniczną stopnia n nad ciałem K. Zauważyć, że $Af(n,K) < S(K^{n,1})$.

(e) Zauważyć, że zamieniając w przykładzie (d) ciało K pierścieniem $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych, otrzymujemy także grupę afiniczną $Af(n,\mathbb{Z})$ stopnia n nad $\mathbb{Z}$.

(-,-)

006. Grupy funkcji

Niech G będzie dowolną grupą i X dowolnym zbiorem niepustym. Oznaczamy przez G^X zbiór wszystkich funkcji $f : X \longrightarrow G$. W zbiorze G^X definiujemy działanie mnożenia funkcji następująco: dla $f,h \in G^X$, $f\cdot h : X \longrightarrow G$, $(f\cdot h)(x) = f(x)h(x)$, gdzie po prawej stronie mamy mnożenie elementów grupy G. Niech $1 \in G^X$ będzie funkcją stałą, taką że $1(x) = 1$ dla każdego $x \in X$. Sprawdzić, że system $(G^X, \cdot, 1)$ jest grupą. Wskazać przykłady tego typu grup występujących w analizie matematycznej. Dla $G = \mathbb{Z}_2$ oraz $X = \{1,2,\dots,n\}$ obliczyć rząd grupy G^X.

(-,+)

007. Produkty kartezjańskie i sumy proste grupy

(a) Niech F i G będą grupami. W produkcie kartezjańskim $F \times G$ definiujemy działanie następująco: $(f,g)(f', g') = (ff', gg')$. Sprawdzić, że $(F \times G, \cdot, (1_F, 1_G))$ jest grupą. Grupę tę nazywamy produktem kartezjańskim grup F i G.

(b) Niech $G_1,\dots,G_n$ będą grupami. Postępując podobnie jak w (a), zdefiniować produkt kartezjański grup $G_1,\dots,G_n$.

(c) Niech $\{G_i : i \in I\}$ będzie dowolną rodziną grup. Niech $P = \prod\{G_i : i \in I\}$ będzie produktem kartezjańskim zbiorów G_i, $i \in I$. W zbiorze P określamy działanie następująco: $(g_i)_{i \in I} \cdot (f_i)_{i \in I} = (g_i f_i)_{i \in I}$. System $(P, \cdot, (1_i)_{i \in I})$ jest grupą. Nazywamy ją produktem kartezjańskim rodziny grup $\{G_i, i \in I\}$. Zauważyć, że jeśli $G_i = G$ dla każdego $i \in I$, to $P = G^I$ (zob. 006). Grupę G^I nazywamy potęgą kartezjańską $|I|$ egzemplarzy grupy G.

(d) W produkcie $P = \prod\{G_i : i \in I\}$ rozpatrzmy podzbiór S złożony z wszystkich elementów $(g_i)_{i \in I}$ produktu P takich, że $g_i = 1_i$ dla prawie wszystkich $i \in I$. Sprawdzić, że S jest podgrupą P; oznaczamy ją $S = \coprod\{G_i : i \in I\}$ i nazywamy zewnętrzną sumą prostą rodziny grup $\{G_i, i \in I\}$. Jeśli $G_i = G$ dla każdego $i \in I$, to grupę S oznaczamy $G^{(I)}$ i nazywamy zewnętrzną sumą prostą $|I|$ egzemplarzy grupy G.

(e) Sprawdzić, że $\prod\{G_i : i \in I\} = \coprod\{G_i : i \in I\} \Longleftrightarrow |I| < \infty$.

(-,-)

008. Niech X będzie zbiorem i niech $P(X)$ oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru X. Dla $U,V \in P(X)$ definiujemy $U * V = (U \cup V) \setminus (U \cap V)$. Sprawdzić, że $(P(X), *, \emptyset)$ jest grupą abelową.

(-,-)

SL

009. Rozpatrzmy 8 następujących macierzy należących do $GL(2,\mathbb{C})$:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ i = \begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{bmatrix},\ j = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ k = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix},\ -I,\ -i,$$

$-j$, $-k$.

(a) Sprawdzić, że $i^2 = j^2 = k^2 = -I$, $ij = k = -ji$, $jk = i = -kj$, $ki = j = -ik$.

(b) Sprawdzić, że zbiór tych 8 macierzy tworzy grupę ze względu na mnożenie macierzy. Grupę tę oznaczamy Quat i nazywamy grupą kwaternionów. Jest to podgrupa $GL(2,\mathbb{C})$.

W dalszym ciągu macierz I traktowaną jako element grupy Quat oznaczać będziemy symbolem 1.

(c) Sprawdzić, że w grupie Quat: $i^4 = j^4 = 1$, $j^{-1}ij = i^{-1}$, $i^2 = j^2$, oraz że równości te pozwalają wypisać kompletną tabelkę działania grupy Quat. (–,–)

010. Niech D oznacza zbiór liczb niewymiernych i niech $f_i : D \longrightarrow D$, $i = 1,\dots,6$ będą funkcjami określonymi następująco: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 1/(1-x)$, $f_3(x) = (x-1)/x$, $f_4(x) = 1/x$, $f_5(x) = 1-x$, $f_6(x) = x/(x-1)$, dla $x \in D$. Sprawdzić, że f_i należą do $S(D)$ – grupy symetrycznej zbioru D. Sprawdzić, że $(\{f_1,\dots,f_6\}, \circ, f_1)$ jest nieabelową podgrupą grupy $S(D)$. (–,–)

• 011. W zbiorze $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych definiujemy działanie $\nmid$ następująco: $x \nmid y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$. Sprawdzić, że $(\mathbb{R}, \nmid, 0)$ jest grupą abelową. (–,–)

• 012. W zbiorze $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych definiujemy działanie $\dot{-}$ następująco: $x \dot{-} y = x + (-1)^x y$. Sprawdzić, że $(\mathbb{Z}, \dot{-}, 0)$ jest grupą nieabelową. Grupę tę oznaczamy symbolem $\mathbb{Z}^{\pm}$. (–,–)

013. W zbiorze $\mathbb{Z}^m = \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$, $m \geq 3$ definiujemy działanie $\#$ następująco:
$(x_1,\dots,x_m) \# (y_1,\dots,y_m) = (x_1+y_1+x_3y_2,\ x_2+y_2,\dots,x_m+y_m)$.

(a) Sprawdzić, że $(\mathbb{Z}^m, \#, (0,\dots,0))$ jest grupą nieabelową.

(b) Rozpatrzmy naturalne wielokrotności kx elementu $x = (x_1,\dots,x_m)$ tej grupy (tzn. $1x = x$, $(k+1)x = kx \# x$). Sprawdzić, że $kx = (kx_1 + \frac{1}{2}k(k-1)x_3x_2,\ kx_2,\dots,kx_m)$. (–,–)

014. W zbiorze $\mathbb{Z}_n^{\,m} = \mathbb{Z}_n \times \dots \times \mathbb{Z}_n$, $n \geq 2$, $m \geq 3$ definiujemy działanie $\#$ następująco:
$(x_1,\dots,x_m) \# (y_1,\dots,y_m) = (x_1+y_1+x_3y_2,\ x_2+y_2,\dots,x_m+y_m)$.

(a) Sprawdzić, że $(\mathbb{Z}_n^{\,m}, \#, (0,\dots,0))$ jest grupą nieabelową rzędu n^m.

(b) Sprawdzić, że dla dowolnej liczby naturalnej k i dla dowolnego $x = (x_1,\dots,x_m) \in \mathbb{Z}_n^{\,m}$ mamy $kx = (kx_1 + \frac{1}{2}k(k-1)x_3x_2,\ kx_2,\dots,kx_m)$.

(c) Sprawdzić, że dla liczby nieparzystej n w grupie $(\mathbb{Z}_n^{\,m}, \#, (0,\dots,0))$ dla każdego $x \in \mathbb{Z}_n^{\,m}$ mamy $nx = (0,\dots,0)$. (–,–)

015. Udowodnić, że relacja izomorfizmu grup jest relacją równoważności w klasie wszystkich grup. (–,–)

• 016. Uzasadnić, że:

(a) $\mathbb{C}(n) \cong \mathbb{Z}_n$.

(b) $|X| = |Y| \Longrightarrow S(X) \cong S(Y)$.

(c) $D(n,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^* \times \dots \times \mathbb{R}^*$ (produkt kartezjański n egzemplarzy grupy $\mathbb{R}^*$).

(d) $\mathrm{End}\, K^n \cong M(n,K)$, gdzie K jest dowolnym ciałem.

(e) $\mathrm{Aut}\, K^n \cong GL(n,K)$, K oznacza dowolne ciało.

(f) $|X| = |Y| \Longrightarrow G^X \cong G^Y$, dla dowolnej grupy G.

(g) $F \cong F_1$ i $G \cong G_1 \Longrightarrow F \times G \cong F_1 \times G_1$.

Uogólnić to twierdzenie na przypadek produktów kartezjańskich dowolnych rodzin grup. (–,+)

017. (a) Dowieść, że grupa $(\mathbb{R}, \nmid, 0)$ określona w 011 jest izomorficzna z $(\mathbb{R}, +, 0)$.

(b) Dowieść, że grupa 6 funkcji określona w 010 jest izomorficzna z grupą $S(3)$. (–,+)

018. Jeśli grupy F i G są izomorficzne oraz równanie $X^2 = f$ ma rozwiązanie w F dla każdego $f \in F$, to równanie $X^2 = g$ ma rozwiązanie w G dla każdego $g \in G$. (–,–)

<u>019</u>. Zbadać, czy następujące grupy są izomorficzne:

(a) $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^+$, (b) $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{Q}^+$, (c) $\mathbb{R}^*$ i $\mathbb{R}^+$, (d) $\mathbb{Q}^*$ i $\mathbb{Q}^+$. (+,+)

<u>020</u>. Niech K będzie dowolnym ciałem lub $K = \mathbb{Z}$. W zbiorze $P(n,K) = GL(n,K) \times K^{n,1}$ określamy mnożenie par następująco: $(A,a).(B,b) = (AB, Ab+a)$.

(a) Dowieść, że $(P(n,K), \cdot, (I,0))$ jest grupą.

(b) Dowieść, że $P(n,K) = Af(n,K)$.

W dalszym ciągu grupę $P(n,K)$ identyfikujemy z grupą $Af(n,K)$ i obie grupy oznaczamy $Af(n,K)$. (−,+)

<u>021</u>. Niech K będzie dowolnym ciałem lub $K = \mathbb{Z}$.

(a) Sprawdzić, że $CAf(n,K) = \{(A,a) \in Af(n,K) : a = 0 \in K^{n,1}\}$ jest podgrupą $Af(n,K)$. Nazywamy ją grupą środkowoafiniczną stopnia n nad K. Dowieść, że $CAf(n,K) \cong GL(n,K)$.

(b) Sprawdzić, że $TAf(n,K) = \{(A,a) \in Af(n,K) : A = I\}$ jest podgrupą $Af(n,K)$. Nazywamy ją grupą translacji stopnia n nad K. Dowieść, że $TAf(n,K) \cong K^{n,1}$ ($K^{n,1}$ jest grupą addytywną macierzy o n wierszach i jednej kolumnie o elementach z K). (−,+)

<u>022</u>. Dla $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{Z}$ niech $Af^+(n,K) = \{(A,a) \in Af(n,K) : \det A > 0\}$. Sprawdzić, że $Af^+(n,K)$ jest podgrupą $Af(n,K)$ oraz

(a) $CAf(n,\mathbb{R}) \cap Af^+(n,\mathbb{R}) \cong Aut^+ \mathbb{R}^n$.

(b) $CAf(n,\mathbb{Z}) \cap Af^+(n,\mathbb{Z}) \cong SL(n,\mathbb{Z})$.

(c) $Af^+(1,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. (−,+)

<u>023</u>. Niech $Af^{\pm}(1,\mathbb{Z}) = \{(A,a) \in Af(1,\mathbb{Z}) : A = (-1)^a\}$. Sprawdzić, że $Af^{\pm}(1,\mathbb{Z})$ jest podgrupą $Af(1,\mathbb{Z})$ oraz $Af^{\pm}(1,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{\pm}$ (zob. 012). (−,+)

<u>024</u>. (a) Jeśli grupy F i G są izomorficzne, to zbiór rozwiązań równania $X^2 = 1_F$ w grupie F jest równoliczny ze zbiorem rozwiązań równania $X^2 = 1_G$ w grupie G.

(b) Wykorzystując (a) dowieść, że 8-elementowa i nieabelowa grupa Quat (zob. <u>009</u>) nie jest izomorficzna z 8-elementową i nieabelową grupą $(\mathbb{Z}_2{}^3, \boxplus, (0,0,0))$ (zob. <u>014</u>). (−,+)

Aksjomaty grupy i rachunki na elementach grupy

<u>025</u>. Sprawdzić, że dla systemu $(G, \cdot)$, gdzie G jest zbiorem oraz $\cdot$ jest działaniem w zbiorze G, następujące układy aksjomatów są równoważne:

(I) (1) Działanie $\cdot$ jest łączne.

(2) Istnieje $e \in G$, że dla każdego $a \in G$ zachodzi $ea = ae = a$.

(3) Dla każdego $a \in G$ istnieje $a' \in G$ takie, że $aa' = a'a = e$.

(II) (1) Działanie $\cdot$ jest łączne.

(2) Istnieje $e \in G$, że dla każdego $a \in G$ zachodzi $ea = a$.

(3) Dla każdego $a \in G$ istnieje $a' \in G$ takie, że $a'a = e$.

(III) (1) Działanie $\cdot$ jest łączne.

(2) Dla każdych $a,b \in G$ istnieje $x \in G$ takie, że $xa = b$.

(3) Dla każdych $a,b \in G$ istnieje $y \in G$ takie, że $ay = b$. (+,−)

<u>026</u>. Niech $(G, \cdot, 1)$ będzie grupą. W zbiorze G definiujemy nowe działanie $/$ następująco: $a/b = ab^{-1}$. Sprawdzić, że dla każdych $a,b,c \in G$ zachodzą równości:

1. $a/a = b/b$.
2. $a/(b/b) = a$.
3. $(a/a)/(b/c) = c/b$.
4. $(a/c)/(b/c) = a/b$.

(−,−)

U w a g a. Można udowodnić, że jeśli w zbiorze G jest określone działanie $/$ o własnościach 1. - 4., to kładąc $1 = a/a$, $b^{-1} = (b/b)/b$ oraz $a \cdot b = a/b^{-1}$, otrzymujemy system $(G, \cdot, 1)$, który jest grupą (zob. M. Hall: The theory of groups, New York 1959, § 1.3).

027. Niech G będzie zbiorem oraz $|G| > 1$. W zbiorze G definiujemy działanie następująco: $x \cdot y = y$, dla $x,y \in G$. Sprawdzić, że $(G, \cdot)$ spełnia aksjomaty (II)(1) i (II)(2) z zadania 025, ale nie spełnia aksjomatu (II)(3). Sprawdzić również, że $(G, \cdot)$ spełnia (III)(1) i (III)(3), ale nie spełnia (III)(2). (-,-)

D

028. Niech $a,b,c \in \mathbb{R}$. W zbiorze $\mathbb{R}$ definiujemy działanie $\ominus$ następująco: $x \ominus y = ax + by + c$. Znaleźć wszystkie trójki a,b,c takie, że $(\mathbb{R}, \ominus)$ jest grupą. (-,+)

029. (a) Niech $(G, \cdot, 1)$ będzie grupą. Udowodnić, że dla każdych $a,b,g \in G$ oraz $n,m \in \mathbb{Z}$ zachodzi:

1. $ga = gb \Longrightarrow a = b$ oraz $ag = bg \Longrightarrow a = b$.
2. $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$; $a^2 = 1 \Longleftrightarrow a = a^{-1}$; $ab = ba \Longleftrightarrow a^{-1}b^{-1}ab = 1$.
3. $a^n a^m = a^{n+m}$; $(a^n)^m = a^{nm}$; $ab = ba \Longrightarrow (ab)^n = a^n b^n$.
4. $(g^{-1}ag)^n = g^{-1}a^n g$.

(b) W grupie $S(3)$ znaleźć takie elementy a,b, że $(ab)^{-1} \neq a^{-1}b^{-1}$ i równocześnie $(ab)^2 \neq a^2b^2$.

(c) W grupie $S(3)$ znaleźć takie elementy x,y, że $(xy)^2 = x^2y^2$ i równocześnie $(xy)^3 = x^3y^3$. Czy równość $(xy)^3 = x^3y^3$ zachodzi dla każdych $x,y \in S(3)$? (-,+)

D

030. Jeśli istnieją trzy kolejne liczby naturalne $k-1$, k, $k+1$ takie, że dla każdych elementów x,y grupy G zachodzi

$$(xy)^n = x^n y^n \quad \text{dla} \quad n = k-1,\ k,\ k+1,$$

to grupa G jest abelowa. (+,+)

031. Dowieść, że jeśli $a^2 = 1$ dla każdego elementu a grupy G, to G jest grupą abelową. (-,+)

032. W dowolnej grupie G przedstawić $a^{-1}b^{-1}ab$ jako iloczyn kwadratów trzech elementów grupy G. (+,+)

033. (a) Udowodnić, że iloczyn ab dwóch elementów grupy G jest kwadratem elementu grupy G wtedy i tylko wtedy, gdy równanie $xax = b$ ma rozwiązanie $x \in G$.

(b) Udowodnić, że element a grupy G jest sześcianem elementu grupy G wtedy i tylko wtedy, gdy równanie $x^2ax = a^{-1}$ ma rozwiązanie $x \in G$. (-,+)

D

034. Jeśli dla dwóch elementów a,b grupy zachodzą równości $b^6 = 1$ oraz $ab = b^4a$, to także $b^3 = 1$ oraz $ab = ba$. (+,-)