

Zadanie domowe 3

Termin: 27 października 2012

- (1) Niech G będzie grupą oraz $H < F < G$.
- (a) Jeśli X jest zbiorem reprezentantów warstw lewostronnych G względem F oraz Y jest zbiorem reprezentantów warstw lewostronnych F względem H , to $XY = \{xy \in G : x \in X \text{ wedge } y \in Y\}$ jest zbiorem reprezentantów warstw lewostronnych G względem H .
- (b) Wykorzystać (a) do udowodnienia następującego **uogólnionego twierdzenia Lagrange'a**: jeśli G jest grupą skończoną oraz $H < F < G$, to

$$(G : H) = (G : F) \cdot (F : H).$$

- (2) Niech $H < F < G$ oraz $(G : F) < \infty$. Pokazać, że jeśli $(G : F) = (G : H)$, to $H = F$. Podać przykład grupy z podgrupami o nieskończonym indeksie, dla których analogicznie twierdzenie nie jest prawdziwe.
- (3) (a) Niech H, K będą podgrupami grupy G . Pokazać, że wówczas $HK = \{hk : h \in H \wedge k \in K\}$ jest podgrupą grupy G wtedy i tylko wtedy, gdy $HK = KH$.
- (b) Niech G będzie grupą rzędu $p^k m$, gdzie p jest liczbą pierwszą oraz $\text{NWD}(p, m) = 1$. Niech H będzie podgrupą rzędu p^k zaś K podgrupą rzędu p^d , gdzie $0 < d \leq k$, taką, że $K \not\subseteq H$. Pokazać, że wówczas HK nie jest podgrupą grupy G . Zilustrować twierdzenie przykładem.
- (c) Pokazać, że jeśli H i K są skończonymi podgrupami grupy G , to

$$|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}.$$