

14. WYKŁAD 14: KONSTRUKCJA PIERŚCIEŃCIEŃ UŁAMKÓW WZGLĘDEM ZBIORU
MULTYPLIKATYWNEGO.

Definicja 14.1. Niech R będzie pierścieniem. Podzbiór $S \subset R$ nazywamy **podzbiorem moltiplikatywnym**, jeżeli

- (1) $1 \in S$, $0 \notin S$,
- (2) $\forall a, b \in S (ab \in S)$.

Przykłady:

- (1) Niech R będzie pierścieniem. Wówczas $S = U(R)$ jest podzbiorem moltiplikatywnym.
- (2) Niech R będzie pierścieniem całkowitym. Wówczas $S = R \setminus \{0\}$ jest podzbiorem moltiplikatywnym.
- (3) Niech R będzie pierścieniem, $I \triangleleft R$ ideałem pierwszym. Wówczas $S = R \setminus I$ jest podzbiorem moltiplikatywnym.
- (4) Niech $R = \mathbb{Z}$. Wówczas $S = \{2^k : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ jest podzbiorem moltiplikatywnym.

Twierdzenie 14.1. Niech $\mathcal{R} = \{S_i : i \in I\}$ będzie rodziną podzbiorów moltiplikatywnych pierścienia R ;

- (1) $\bigcap_{i \in I} S_i$ jest podzbiorem moltiplikatywnym pierścienia R ,
- (2) $\bigcup_{i \in I} S_i$ jest podzbiorem moltiplikatywnym pierścienia R , o ile $\mathcal{R}$ jest łańcuchem.

Definicja 14.2. Niech R będzie pierścieniem oraz $A \subset U(R)$ pewnym zbiorem. Najmniejszy w sensie inkluzji podzbiór moltiplikatywny pierścienia R zawierający zbiór A (tj. przekrój wszystkich podzbiorów moltiplikatywnych pierścienia R zawierających A) nazywamy **podzbiorem moltiplikatywnym generowanym przez A** .

Definicja i Uwaga 14.1. Niech R będzie pierścieniem oraz $S \subset R$ podzbiorem moltiplikatywnym. W zbiorze $R \times S$ definiujemy relację $\sim$ warunkiem

$$(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2) \text{ wtw. } \exists s_0 \in S [s_0(a_1s_2 - a_2s_1) = 0].$$

Wówczas relacja $\sim$ jest relacją równoważnościową. Klasę abstrakcji $[(a, s)]_{\sim}$ nazywamy **ułamkiem o liczniku a i mianowniku s** i oznaczamy $\frac{a}{s}$. Zbiór klas abstrakcji relacji $\sim$ oznaczamy przez $S^{-1}R$. W zbiorze $S^{-1}R$ definiujemy

- element zerowy

$$\frac{0}{1},$$

- jedynkę

$$\frac{1}{1},$$

- dodawanie

$$\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} = \frac{a_1s_2 + a_2s_1}{s_1s_2},$$

- mnożenie

$$\frac{a_1}{s_1} \cdot \frac{a_2}{s_2} = \frac{a_1a_2}{s_1s_2}.$$

Wówczas $(S^{-1}R)$ jest pierścieniem. Nazywamy go **pierścieniem ułamków (lokalizacją) pierścienia R względem zbioru moltiplikatywnego S** .

Prosty dowód pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie.

Definicja i Uwaga 14.2. Niech R będzie pierścieniem oraz $S \subset R$ podzbiorem mnożliwym. Odwołanie $\lambda : R \rightarrow S^{-1}R$ dane wzorem

$$\lambda(a) = \frac{a}{1}$$

jest homomorfizmem. Nazywamy go **homomorfizmem kanonicznym**. Ponadto

$$\lambda(S) \subset U(S^{-1}R).$$

Prosty dowód pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie.

Twierdzenie 14.2. Niech R będzie pierścieniem oraz $S \subset R$ podzbiorem mnożliwym. Homomorfizm kanoniczny $\lambda : R \rightarrow S^{-1}R$ jest różnowartościowy wtedy i tylko wtedy, gdy

$$S \subset R \setminus \mathcal{D}(R).$$

Dowód. ($\Leftarrow$) : Ustalmy $a, b \in R$ i załóżmy, że

$$\lambda(a) = \lambda(b).$$

Wówczas $\frac{a}{1} = \frac{b}{1}$, a zatem dla pewnego $s_0 \in S$:

$$s_0(a - b) = 0.$$

Ponieważ s_0 nie jest dzielnikiem zera, więc $a - b = 0$, czyli $a = b$.

($\Rightarrow$) : Załóżmy, że $s_0 \in S$ jest dzielnikiem zera, czyli $s_0 a = 0$ dla pewnego $a \in R \setminus \{0\}$. Wówczas $s_0(a - 0) = 0$, czyli $\frac{a}{1} = \frac{0}{1}$, a zatem

$$\lambda(a) = \lambda(0)$$

więc λ nie jest różnowartościowy. □

Wniosek 14.1. Niech R będzie pierścieniem całkowitym oraz $S \subset R$ podzbiorem mnożliwym. Wówczas homomorfizm kanoniczny $\lambda : R \rightarrow S^{-1}R$ jest różnowartościowy.

Definicja i Uwaga 14.3. Niech R będzie pierścieniem całkowitym oraz $S = R \setminus \{0\}$. Wówczas homomorfizm kanoniczny $\lambda : R \rightarrow S^{-1}R$ jest różnowartościowy, a pierścień $S^{-1}R$ jest ciałem (to znaczy każdy pierścień całkowity można zanurzyć w ciało). Ciało $S^{-1}R$ nazywamy **ciałem ułamków pierścienia całkowitego R** i oznaczamy (R) .

Dowód. Wystarczy pokazać, że $S^{-1}R$ jest ciałem. Ustalmy $\frac{a}{s} \in S^{-1}R \setminus \{\frac{0}{1}\}$. Pokażemy, że $\frac{a}{s} \in U(S^{-1}R)$. Zauważmy, że $a \neq 0$: istotnie, przypuśćmy, że $a = 0$. Wówczas $\frac{a}{s} = \frac{0}{s} = \frac{0}{1}$, co daje sprzeczność. Wobec tego $\frac{s}{a} \in S^{-1}R$. Ponadto $\frac{a}{s} \cdot \frac{s}{a} = \frac{1}{1}$. □

Przykłady:

- (5) Niech $R = \mathbb{Z}$. Wówczas $\mathbb{Q} \cong (\mathbb{Z})$ jest ciałem ułamków $\mathbb{Z}$.
- (6) Niech $R = F[x_1, \dots, x_n]$ będzie pierścieniem wielomianów n zmiennych nad ciałem F . Wówczas ciało ułamków pierścienia R oznaczamy $F(x_1, \dots, x_n)$ i nazywamy **ciałem funkcji wymiernych** a jego elementy **funkcjami wymiernymi n zmiennych**.

Twierdzenie 14.3 (własność uniwersalna pierścienia ułamków). Niech P, R będą pierścieniami, $S \subset P$ zbiorem mnożliwym, niech $\phi : P \rightarrow R$ będzie homomorfizmem takim, że

$$\phi(S) \subset U(R).$$

Wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\psi : S^{-1}P \rightarrow S^{-1}R$ taki, że

$$\psi \circ \lambda = \phi,$$

gdzie $\lambda : P \rightarrow S^{-1}P$ jest homomorfizmem kanonicznym. Ponadto jeśli ϕ jest różnowartościowy, to ψ jest różnowartościowy. Inaczej: diagram

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\phi} & R \\ \lambda \downarrow & \nearrow \psi & \\ S^{-1}P & & \end{array}$$

jest przemienny.

Dowód. Zdefiniujmy odwzorowanie $\psi : S^{-1}P \rightarrow R$ wzorem

$$\psi\left(\frac{a}{s}\right) = \phi(a)(\phi(s))^{-1} \text{ dla } \frac{a}{s} \in S^{-1}P.$$

Pokażemy, że ψ jest dobrze określone. Istotnie, ustalmy $\frac{a}{s} \in S^{-1}P$ i niech $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$. Wobec tego istnieje element $s_0 \in S$ taki, że

$$s_0(as' - a's) = 0.$$

Zatem

$$\phi(s_0(as' - a's)) = \phi(s_0)(\phi(a)\phi(s') - \phi(a')\phi(s)) = 0.$$

Ponieważ $\phi(s_0) \in U(R)$, więc $\phi(a)\phi(s') - \phi(a')\phi(s) = 0$, a stąd

$$\psi\left(\frac{a}{s}\right) = \phi(a)(\phi(s))^{-1} = \phi(a')(\phi(s'))^{-1} = \psi\left(\frac{a'}{s'}\right).$$

Bez trudu sprawdzamy, że ψ jest homomorfizmem oraz że jeśli ϕ jest różnowartościowy, to ψ jest różnowartościowy. Pokażemy, że $\psi \circ \lambda = \phi$. Ustalmy w tym celu $a \in P$. Mamy:

$$\psi \circ \lambda(a) = \psi(\lambda(a)) = \psi\left(\frac{a}{1}\right) = \phi(a)(\psi(1))^{-1} = \phi(a).$$

Pozostaje wykazać, że ψ jest wyznaczone jednoznacznie. Niech bowiem $\psi_1, \psi_2 : S^{-1}P \rightarrow S^{-1}R$ będą takimi homomorfizmami, że

$$\psi_1 \circ \lambda = \phi \text{ oraz } \psi_2 \circ \lambda = \phi.$$

Ustalmy $\frac{a}{s} \in S^{-1}P$. Mamy:

$$\begin{aligned} \psi_1\left(\frac{a}{s}\right) &= \psi_1\left(\frac{a}{1} \cdot \frac{1}{s}\right) = \psi_1\left(\frac{a}{1}\right) \cdot \psi_1\left(\frac{1}{s}\right) = \psi_1\left(\frac{a}{1}\right) \cdot (\psi_1\left(\frac{s}{1}\right))^{-1} \\ &= \psi_1(\lambda(a))(\psi_1(\lambda(s)))^{-1} = \psi_1 \circ \lambda(a) \cdot (\psi_2 \circ \lambda(a))^{-1} \\ &= \phi(a)(\psi(s))^{-1} = \psi_2\left(\frac{a}{s}\right). \end{aligned}$$

□

Wniosek 14.2. Niech P będzie pierścieniem całkowitym, niech R będzie dowolnym pierścieniem, $S \subset P$ zbiorem mnożymym, niech $\phi : P \rightarrow R$ będzie homomorfizmem takim, że

$$\phi(S) \subset U(R).$$

Wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\psi : S^{-1}P \rightarrow S^{-1}R$ taki, że

$$\psi \circ \lambda = \phi,$$

gdzie $\lambda : P \rightarrow S^{-1}P$ jest homomorfizmem kanonicznym. Ponadto jeśli ϕ jest różnowartościowy, to ψ jest różnowartościowy. Inaczej: diagram

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\phi} & R \\ \lambda \downarrow & \nearrow \psi & \\ S^{-1}P & & \end{array}$$

jest przemienny.

Wniosek 14.3. Niech P będzie pierścieniem całkowitym, niech F będzie dowolnym ciałem, niech $\phi : P \rightarrow F$ będzie homomorfizmem różnowartościowym. Wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm różnowartościowy $\psi : (P) \rightarrow F$ taki, że

$$\psi \circ \lambda = \phi,$$

gdzie $\lambda : P \rightarrow (P)$ jest homomorfizmem kanonicznym. Ponadto jeśli ϕ jest różnowartościowy, to ψ jest różnowartościowy. Inaczej: diagram

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\phi} & F \\ \lambda \downarrow & \nearrow \psi & \\ (P) & & \end{array}$$

jest przemienny (to znaczy dla każdego pierścienia całkowitego jego ciało ułamków jest najmniejszym ciałem, w jaki pierścień ten można zanurzyć).