

8. WYKŁAD 8: PARADYMATY DOWODZENIA

Sprawdzenie, czy dana formuła rachunku zdań jest tautologią polega zwykle na obliczeniu jej wartości dla 2^n różnych wartościowań, gdzie n jest liczbą zmiennych zdaniowych tej formuły. Jak dotąd nie są znane radykalnie szybsze metody. Dla rachunku predykatów nie istnieje w ogóle żaden algorytm sprawdzania czy dana formuła jest tautologią, o czym przekonał się na ostatnim wykładzie. W obu przypadkach istnieją jednak metody dowodzenia pozwalające na wyprowadzanie prawdziwych formuł za pomocą ustalonych procedur syntaktycznych w ramach pewnego systemu dowodzenia.

Zajmiemy się najpierw rachunkiem zdań. Poznane przez nas dotychczas syntaktyczne podejście do dowodzenia twierdzeń klasycznego rachunku zdań zwane bywa **systemem hilbertowskim**. Poznamy obecnie dwa dalsze systemy tego typu, a mianowicie system naturalnej dedukcji i system rachunku sekwentów.

8.1. Naturalna dedukcja. System naturalnej dedukcji (wprowadzony przez S. Jaśkowskiego i G. Gentzena) operuje wyrażeniami zwanymi sekwentami. Są to wyrażenia postaci $\Delta \vdash \phi$, gdzie Δ jest pewnym skończonym zbiorem formuł, a ϕ jest formułą. W odróżnieniu od systemu hilbertowskiego, w naturalnej dedukcji istotne są reguły dowodzenia, a aksjomat jest bardzo prosty. Charakterystyczną cechą naturalnej dedukcji jest to, że reguły dowodzenia (za wyjątkiem reguły (PS) "przez sprzeczność") są podzielone na grupy, po jednej dla każdego spójnika. W ramach jednej takiej grupy mamy dwa rodzaje reguł. Reguły wprowadzania mówią o tym w jakiej sytuacji można wprowadzić dany spójnik na prawo od znaku $\vdash$ (tj. wywnioskować formułę danego kształtu). Reguły eliminacji mówią o tym w jakiej sytuacji można ten spójnik wyeliminować, tzn. jak można użyć formuły zbudowanej z jego pomocą do wyprowadzenia innej formuły. Regułę dowodzenia "przez sprzeczność" można traktować jako "silną" regułę eliminacji $\perp$. Pamiętajmy, że $\neg\phi$ oznacza formułę $\phi \rightarrow \perp$.

Poniżej będziemy stosować następującą konwencję: Napis $\Delta, \phi_1, \dots, \phi_n$ oznacza zbiór $\Delta \cup \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$, przy czym nie zakładamy tu, że $\phi_i \notin \Delta$.

Aksjomat:

(A0): $\Delta, \phi \vdash \phi$

Reguły dowodzenia:

$\rightarrow$ -intro: $\frac{\Delta, \phi \vdash \psi}{\Delta \vdash \phi \rightarrow \psi}$

$\rightarrow$ -elim: $\frac{\Delta \vdash \phi \rightarrow \psi, \Delta \vdash \phi}{\Delta \vdash \psi}$

$\wedge$ -intro: $\frac{\Delta \vdash \phi, \Delta \vdash \psi}{\Delta \vdash \phi \wedge \psi}$

$\wedge$ -elim: $\frac{\Delta \vdash \phi \wedge \psi}{\Delta \vdash \phi}$

$\wedge$ -elim: $\frac{\Delta \vdash \phi \wedge \psi}{\Delta \vdash \psi}$

$\vee$ -intro: $\frac{\Delta \vdash \phi}{\Delta \vdash \phi \vee \psi}$

$\vee$ -intro: $\frac{\Delta \vdash \psi}{\Delta \vdash \phi \vee \psi}$

$\vee$ -elim: $\frac{\Delta \vdash \phi \vee \psi, \Delta, \phi \vdash \zeta, \Delta, \psi \vdash \zeta}{\Delta \vdash \zeta}$

(PS): $\frac{\Delta, \neg\phi \vdash \perp}{\Delta \vdash \phi}$

Zauważmy, że szczególnym przypadkiem reguły ($\rightarrow$ -intro) jest następująca reguła, można ją traktować jak regułę wprowadzenia negacji:

$$\frac{\Delta, \phi \vdash \perp}{\Delta \vdash \neg\phi}$$

Zauważmy też, że szczególnym przypadkiem reguły ($\rightarrow$ -elim) jest następująca reguła, można ją traktować jak regułę eliminacji negacji:

$$\frac{\Delta \vdash \neg\phi, \Delta \vdash \phi}{\Delta \vdash \perp}$$

O ile dowody w systemie hilbertowskim definiowaliśmy zarówno jako ciągi jak i drzewa, ale na ogół traktowaliśmy je jako ciągi, o tyle w systemie naturalnej dedukcji dowody są drzewami. Pozwala to znacznie lepiej wizualizować zależności pomiędzy przesłankami i konkluzją stosowanych reguł. Dowodem sekwentu $\Delta \vdash \phi$ w systemie naturalnej dedukcji nazwiemy drzewo etykietowane sekwentami tak, że korzeń ma etykietę $\Delta \vdash \phi$, liście są etykietowane wystąpieniami aksjomatu oraz każdy wewnętrzny wierzchołek jest etykietowany sekwentem otrzymanym z etykiet potomków tego wierzchołka przy zastosowaniu jednej z reguł. Piszemy $\Delta \vdash_N \phi$, gdy sekwent $\Delta \vdash \phi$ ma dowód w systemie naturalnej dedukcji. Gdy $\Delta = \emptyset$ to mówimy też, że ϕ jest **twierdzeniem** systemu naturalnej dedukcji i zapisujemy to przez $\vdash_N \phi$. Jeśli Δ jest zbiorem nieskończonym, to $\Delta \vdash_N \phi$ oznacza, że istnieje dowód sekwentu $\Delta_0 \vdash \phi$, dla pewnego skończonego $\Delta_0 \subset \Delta$.

Przykłady:

(1) Pokażemy, że $\vdash_N p \rightarrow p$:

$$\frac{p \vdash p}{\vdash p \rightarrow p} (\rightarrow\text{-intro})$$

(2) Pokażemy, że $\vdash_N p \rightarrow (q \rightarrow p)$:

$$\frac{\frac{p, q \vdash p}{p \vdash q \rightarrow p} (\rightarrow\text{-intro})}{\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)} (\rightarrow\text{-intro})$$

(3) Pokażemy, że $\vdash_N \neg\neg p \rightarrow p$:

$$\frac{\frac{\neg\neg p, \neg p \vdash \neg\neg p, \neg\neg p, \neg p \vdash \neg p}{\neg\neg p, \neg p \vdash p} (\rightarrow\text{-elim})}{\frac{\frac{\neg\neg p, \neg p \vdash p}{\neg\neg p \vdash p} (\text{PS})}{\vdash \neg\neg p \rightarrow \neg p} (\rightarrow\text{-intro})}$$

Oznaczmy przez $\Delta \vdash_H \phi$ to, że formuła ϕ ma dowód na gruncie zbioru formuł Δ w rachunku hilbertowskim.

Twierdzenie 23. Dla dowolnego sekwentu $\Delta \vdash \phi$:

$$\Delta \vdash_N \phi \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \Delta \vdash_H \phi$$

Dowód. Dla dowodu tego, że każdy dowód w systemie naturalnej dedukcji daje się przerobić na dowód w rachunku hilbertowskim wystarczy sprawdzić, że każda z reguł w systemie naturalnej dedukcji jest wyprowadzalna w systemie hilbertowskim – ale wynika to wprost z lematów udowodnionych na Wykładzie 4.

Na odwrót, dla pokazania implikacji przeciwnej należy pokazać, że wszystkie aksjomaty KRZ są twierdzeniami systemu naturalnej dedukcji. Kilka z nich udowodniliśmy już w powyższych przykładach, dowody pozostałych pozostawiamy Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie. $\square$

8.2. Rachunek sekwentów. Dla przedstawienia rachunku sekwentów rozszerzymy nieco pojęcie sekwentu. Przez **sekwent** będziemy teraz rozumieć napis $\Delta \vdash \Gamma$, gdzie Δ oraz Γ są skończonymi zbiorami formuł. Intuicyjnie, wyprowadzalność sekwentu $\Delta \vdash \Gamma$ w rachunku sekwentów będzie oznaczać, że alternatywa formuł z Γ wynika z hipotez Δ . Podobnie jak w poprzedniej części, rozważamy formuły, zbudowane w oparciu o spójniki $\rightarrow, \vee, \wedge$ oraz stałą zdaniową $\perp$. Negację $\neg$ traktujemy jako spójnik zdefiniowany przez $\rightarrow$ i $\vdash$. Charakterystyczną cechą rachunku sekwentów jest specyficzna postać reguł. Reguły w tym systemie naturalnie dzielą się na dwie grupy: jedna grupa reguł opisuje sytuacje kiedy możemy wprowadzić dany spójnik na lewo od znaku $\vdash$, a druga grupa jest odpowiedzialna za wprowadzanie spójnika na prawo od $\vdash$. Dla każdego spójnika mamy odpowiadającą parę reguł. Aksjomat ($A\perp$) możemy traktować jako regułę (bez przesłanek) wprowadzenia $\perp$ z lewej strony znaku $\vdash$.

Aksjomaty:

(A00): $\Delta, \phi \vdash \Gamma, \phi$

(A $\perp$): $\Delta, \perp \vdash \Gamma$

Reguły dowodzenia:

$\rightarrow$ -lewa: $\frac{\Delta \vdash \Gamma, \phi; \Delta, \psi \vdash \Gamma}{\Delta, \phi \rightarrow \psi \vdash \Gamma}$

$\rightarrow$ -prawa: $\frac{\Delta, \phi \vdash \Gamma, \psi}{\Delta \vdash \Gamma, \phi \rightarrow \psi}$

$\wedge$ -lewa: $\frac{\Delta, \phi, \psi \vdash \Gamma}{\Delta, \phi \wedge \psi \vdash \Gamma}$

$\wedge$ -prawa: $\frac{\Delta \vdash \Gamma, \phi; \Delta \vdash \Gamma, \psi}{\Delta \vdash \Gamma, \phi \wedge \psi}$

$\vee$ -lewa: $\frac{\Delta, \phi \vdash \Gamma; \Delta, \psi \vdash \Gamma}{\Delta, \phi \vee \psi \vdash \Gamma}$

$\vee$ -prawa: $\frac{\Delta \vdash \Gamma, \phi; \Delta \vdash \Gamma, \psi}{\Delta \vdash \Gamma, \phi \vee \psi}$

Dowodem sekwentu $\Delta \vdash \Gamma$, tak jak poprzednio, nazywamy drzewo etykietowane sekwentami tak, że korzeń jest etykietowany przez $\Delta \vdash \Gamma$, liście są etykietowane aksjomatami oraz wierzchołki wewnętrzne są etykietowane sekwentami otrzymanymi poprawnie przez zastosowanie reguł dowodzenia. Jeśli istnieje dowód sekwentu $\Delta \vdash \Gamma$ w rachunku sekwentów to zapisujemy to przez $\Delta \vdash_G \Gamma$. (Litera G pochodzi od nazwiska twórcy tego systemu, G. Gentzena.) Piszemy też $\Delta \vdash_G \phi$, gdy Δ jest nieskończony, ale $\Delta_0 \vdash_G \phi$ dla pewnego skończonego $\Delta_0 \subset \Delta$.

Zauważmy, że jeśli mamy sekwent $\Delta \vdash \Gamma, \phi$ to stosując aksjomat ($A\perp$), a następnie ($\rightarrow$ -lewa) dostajemy sekwent $\Delta, \neg\phi \vdash \Gamma$. Zatem następująca reguła jest wyprowadzalna w systemie $\vdash_G$:

$$(\neg\text{-lewa}) \frac{\Delta \vdash \Gamma, \phi}{\Delta, \neg\phi \vdash \Gamma}$$

Ponadto zauważmy, że jeśli mamy dowód sekwentu $\Delta \vdash \Gamma$, to dla każdej formuły ϕ możemy ją dodać do prawej strony każdego sekwentu w tym dowodzie i otrzymamy dowód sekwentu $\Delta \vdash \Gamma, \phi$. Łatwy dowód indukcyjny pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie. W szczególności, jeśli mamy udowodniony sekwent $\Delta, \phi \vdash \Gamma$, to możemy też udowodnić sekwent $\Delta, \phi \vdash \Gamma, \perp$. Stosując do niego regułę ($\rightarrow$ -prawa) otrzymujemy sekwent $\Delta \vdash \Gamma, \neg\phi$. Tym samym pokazaliśmy, że następująca reguła jest dopuszczalna w systemie $\vdash_G$:

$$(\neg\text{-prawa}) \frac{\Delta, \phi \vdash \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma, \neg\phi}$$

Twierdzenie 24. Dla dowolnego sekwentu $\Delta \vdash \phi$:

$$\Delta \vdash_G \phi \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \Delta \vdash_H \phi$$

Powyższe twierdzenie pozostawimy bez dowodu. Łatwo jest "przetłumaczyć" każde wyprowadzenie w systemie $\vdash_G$ na dowód w stylu Hilberta. Dla dowodu implikacji odwrotnej rozszerza się system $\vdash_G$ przez

dodanie nowej reguły zwanej cięciem:

$$(\text{cięcie}) \frac{\Delta, \phi \vdash \Gamma; \Delta \vdash \phi, \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma}$$

Niech $\vdash_{GC}$ oznacza system gentzenowski z cięciem. Bez trudu można pokazać, że reguła odrywania jest wyprowadzalna w $\vdash_{GC}$. Zatem, korzystając z twierdzenia o pełności pokazujemy, że każda tautologia jest twierdzeniem systemu $\vdash_{GC}$. Główna trudność w dowodzie polega na udowodnieniu następującego twierdzenia o eliminacji cięcia:

Twierdzenie 25. *Jeśli $\Delta \vdash_{GC} \Gamma$, to $\Delta \vdash_G \Gamma$.*

Główna zaleta dowodów w rachunku sekwentów wynika z następującej własności podformuł: wszystkie formuły występujące w przesłance dowolnej reguły są podformułami formuł występujących w konkluzji. Zatem np. w dowodzie sekwentu $\vdash \phi$ mamy do czynienia tylko z podformułami formuły ϕ . Dla danej formuły ϕ , łatwiej więc znaleźć dowód w sensie Gentzena niż np. dowód w sensie Hilberta. Dlatego systemy zbliżone do rachunku sekwentów znajdują zastosowanie w automatycznym dowodzeniu twierdzeń.

Przykład:

- (4) Poszukamy dowodu sekwentu $\vdash \neg\neg\phi \rightarrow \phi$ w $\vdash_G$. Ponieważ najbardziej zewnętrznym spójnikiem w rozważanej formule jest $\rightarrow$, to ostatnią regułą w poszukiwanym dowodzie musiała być reguła ($\rightarrow$ -prawa). Zatem wystarczy znaleźć dowód sekwentu $\neg\neg\phi \vdash \phi$. Najbardziej zewnętrznym spójnikiem formuły po lewej stronie jest $\neg$, a zatem na mocy reguły ($\neg$ -lewa) wystarczy udowodnić sekwent $\vdash \phi, \neg\phi$. Podobnie, na mocy reguły ($\neg$ -prawa), wystarczy udowodnić sekwent $\phi \vdash \phi$, a on przecież jest aksjomatem.