

6. WYKŁAD 6: RACHUNEK PREDYKATÓW.

Język pierwszego rzędu składa się z:

- symboli relacyjnych P_i , $i \in I$, gdzie $\#(P_i)$ oznaczać będzie ilość argumentów symbolu P_i ,
- symboli funkcyjnych f_j , $j \in J$, gdzie $\#(f_j)$ oznaczać będzie ilość argumentów f_j ,
- stałych c_k , $k \in K$.

Formalnie język będziemy definiowali jako zbiór $L = \{(P_i)_{i \in I}, (f_j)_{j \in J}, (c_k)_{k \in K}\}$. P_i, f_j, c_k nazywamy symbolami pozalogicznymi. **Symbole logiczne**, niezależne od L , są następujące:

- $\neg, \rightarrow$;
- zbiór zmiennych indywiduowych $V = \{v_0, v_1, v_2, \dots\}$;
- kwantyfikator $\forall$;
- binarny symbol relacyjny $\equiv$ odpowiadający identyczności;
- nawiasy.

Moc $\|L\|$ języka L definiujemy jako większą z liczb $\aleph_0$ lub moc zbioru symboli. **Sygnaturą** (lub **typem**) języka L nazywamy ciąg $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$, gdzie $\tau_1(i) = \#(P_i)$, $\tau_2(j) = \#(f_j)$, $\tau_3(k) = 0$, dla $k \in K$. L' jest **wzbogaceniem języka L** , gdy $L' = L \cup X$, gdzie X jest zbiorem pewnych symboli. Wtedy L nazywamy **reduktem** języka L' .

Zbiór **termów** T języka L definiujemy następująco:

- $V \subset T$,
- $c_k \in T$ dla każdego $k \in K$,
- jeżeli f jest symbolem funkcyjnym n -argumentowym i $t_1, \dots, t_n$ są termami, to

$$ft_1 \dots t_n$$

jest termem.

Zbiór **formuł atomowych** języka L składa się z wyrażeń postaci:

- $t_1 \equiv t_2$, dla $t_1, t_2 \in T$;
- $Pt_1 \dots t_n$, gdzie P jest n -argumentowym symbolem relacyjnym i $t_1, \dots, t_n \in T$.

Zbiór **formuł** języka L jest najmniejszym zbiorem spełniającym warunki:

- zawiera on zbiór wszystkich formuł atomowych;
- jeżeli A, B są formułami i x jest zmienną indywiduową, to

$$\neg A, A \rightarrow B, \forall x(A)$$

są formułami.

Podformułę definiujemy w analogiczny sposób.

Zauważmy, że moc zbioru wszystkich formuł języka L jest równa $\|L\|$.

Definiujemy również:

- $\exists x(A) = \neg \forall x \neg A$;
- $A \vee B = \neg A \rightarrow B$;
- $A \wedge B = \neg(A \rightarrow \neg B)$;
- $A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

Zbiór **zmiennych wolnych** termu, $vf(t)$, definiujemy następująco:

- $vf(x) = \{x\}$,
- $vf(c) = \emptyset$,
- $vf(ft_1 \dots t_n) = vf(t_1) \cup \dots \cup vf(t_n)$.

Z kolei zbiór **zmiennych związanych** termu $vb(f)$ jest zawsze zbiorem pustym.

Zbiór **zmiennych wolnych** formuły A , $vf(A)$, definiujemy następująco:

- $vf(t_1 \equiv t_2) = vf(t_1) \cup vf(t_2)$;
- $vf(Pt_1 \dots t_n) = vf(t_1) \cup \dots \cup vf(t_n)$;
- $vf(\neg A) = vf(A)$;
- $vf(A \rightarrow B) = vf(A) \cup vf(B)$;
- $vf(\forall x A) = vf(A) \setminus \{x\}$.

Zbiór **zmiennych związanych** formuły A , $vb(A)$, definiujemy następująco:

- $vb(A) = \emptyset$ dla każdej formuły atomowej A ;
- $vb(\neg A) = vb(A)$;
- $vb(A \rightarrow B) = vb(A) \cup vb(B)$;
- $vb(\forall x A) = vb(A) \cup \{x\}$.

Formułę nazywamy **zdaniem**, gdy $vf(A) = \emptyset$. Piszemy $A(x_1, \dots, x_n)$, gdy $vf(A) \subset \{x_1, \dots, x_n\}$.

Przykład:

(1) Niech $A = \forall v_0 P_0 v_0 v_1 v_2 \rightarrow \forall v_1 P_1 v_1$. Wówczas $vf(A) = \{v_1, v_2\}$ oraz $vb(A) = \{v_0, v_1\}$.

Operację **podstawiania** termu t za zmienną x , (x/t) , definiujemy następująco:

- $y(x/t) = \begin{cases} t, & \text{gdy } x = y \\ y, & \text{gdy } x \neq y \end{cases}$,
- $c(x/t) = c$,
- $ft_1 \dots t_n(x/t) = ft_1(x/t) \dots t_n(x/t)$,
- $Pt_1 \dots t_n(x/t) = Pt_1(x/t) \dots t_n(x/t)$,
- $(\neg A)(x/t) = \neg(A(x/t))$,
- $(A \rightarrow B)(x/t) = A(x/t) \rightarrow B(x/t)$,
- $(\forall y A)(x/t) = \begin{cases} \forall y A, & \text{gdy } x = y \text{ lub } y \in vf(t), \\ \forall y (A(x/t)), & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$

Przykład:

(2) Niech $A = \forall x (Py \rightarrow Px) \rightarrow (Py \rightarrow \forall x Px)$. Wówczas $A(y/x) = \forall x (Py \rightarrow Px) \rightarrow (Px \rightarrow \forall x Px)$. Ponadto $A(y/x)(y/c) = \forall x (Pc \rightarrow Px) \rightarrow (Px \rightarrow \forall x Px)$. Zinterpretujmy Px jako " $x = 0$ " oraz niech $c = 1$. Wówczas formuła $\forall x (y = 0 \rightarrow x = 0) \rightarrow (y = 0 \rightarrow \forall x x = 0)$ jest prawdziwa, natomiast formuła $\forall x (1 = 0 \rightarrow x = 0) \rightarrow (x = 0 \rightarrow \forall x x = 0)$ jest fałszywa. Widzimy więc, że przez podstawianie możemy z formuły prawdziwej otrzymać fałszywą.

Zbiór **zmiennych wolnych dla termu** t w formule A , $Ff(t, A)$, definiujemy następująco: $x \in Ff(t, A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

- $x \notin vf(A)$,
- $x \in vf(A)$ oraz
 - A jest formułą atomową,
 - $A = \neg B$ i $x \in Ff(t, B)$,
 - $A = B \rightarrow C$ i $x \in Ff(t, B) \cap Ff(t, C)$,
 - $A = \forall y B$ i $y \notin vf(t)$ i $x \in Ff(t, B)$.

Niech $M \neq \emptyset$. **Interpretacją** języka L w zbiorze M nazywamy odwzorowanie I takie, że

- $I(P_i) \subset M^{\sharp(P_i)}$,
- $I(f_j) : M^{\sharp(f_j)} \rightarrow M$,

- $I(c_k) \in M$.

Modelem (albo **strukturą**) dla L nazywamy parę $\mathfrak{M} = (M, I)$. Dla wygody zamiast $I(P_i)$, $I(f_j)$, $I(c_k)$ piszemy $P_i^{\mathfrak{M}}$, $f_j^{\mathfrak{M}}$ i $c_k^{\mathfrak{M}}$ oraz, gdy L zawiera skończenie wiele symboli pozalogicznych:

$$\mathfrak{M} = (M, P_1^{\mathfrak{M}}, \dots, P_i^{\mathfrak{M}}, f_1^{\mathfrak{M}}, \dots, f_j^{\mathfrak{M}}, c_1^{\mathfrak{M}}, \dots, c_k^{\mathfrak{M}}).$$

Moc modelu określamy jako moc zbioru M .

Rozważmy język L i jego rozszerzenie L' o pewien zbiór nowych symboli X . Niech $\mathfrak{M} = (M, I)$ będzie modelem dla L i niech I' będzie interpretacją symboli należących do X w M . Wówczas $\mathfrak{M}' = (M, I \cup I')$ nazywamy **rozszerzeniem** modelu $\mathfrak{M}$, a $\mathfrak{M}$ **reduktem** modelu $\mathfrak{M}'$.

Redukt modelu $\mathfrak{M} = (M, I)$ do modelu $\mathfrak{M}' = (M, I')$ takiego, że I' jest interpretacją L zwięzłą jedynie do symboli funkcyjnych i stałych, jest algebrą.

Model $\mathfrak{N} = (N, \{P_i^{\mathfrak{N}}\}, \{f_j^{\mathfrak{N}}\}, \{c_k^{\mathfrak{N}}\})$ nazywamy **podmodelem** modelu $\mathfrak{M} = (M, \{P_i^{\mathfrak{M}}\}, \{f_j^{\mathfrak{M}}\}, \{c_k^{\mathfrak{M}}\})$ gdy:

- $N \subset M$, $f_j^{\mathfrak{N}} = f_j^{\mathfrak{M}}|_N$, $c^{\mathfrak{N}} = c^{\mathfrak{M}}$,
- dla dowolnych $a_1, \dots, a_n \in N$:

$$P_i^{\mathfrak{N}}(a_1, \dots, a_n) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } P_i^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n).$$

Odwzorowanie $\phi : M \rightarrow N$ jest **izomorfizmem modeli** $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ gdy

- ϕ jest izomorfizmem odpowiednich algebr,
- dla dowolnych $a_1, \dots, a_n \in M$:

$$P_i^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } P_i^{\mathfrak{N}}(\phi(a_1), \dots, \phi(a_n)).$$

Rozważmy model $\mathfrak{M}$ języka L i oznaczmy przez V zbiór wszystkich zmiennych indywiduowych. Odwzorowanie $\alpha : V \rightarrow M$ nazywamy **wartościowaniem** w M .

Wartość termu $t^{\mathfrak{M}}[\alpha] \in M$ definiujemy następująco:

- $(v_i)^{\mathfrak{M}}[\alpha] = \alpha(v_i)$,
- $(c_k)^{\mathfrak{M}}[\alpha] = c_k^{\mathfrak{M}}$,
- $(f_j t_1 \dots t_n)^{\mathfrak{M}}[\alpha] = f_j^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}[\alpha], \dots, t_n^{\mathfrak{M}}[\alpha])$.

Niech A będzie formułą języka L , $\mathfrak{M}$ modelem dla języka L , a α wartościowaniem w M . Definiujemy **spełnialność** formuły A w modelu $\mathfrak{M}$ z wartościowaniem α , $\mathfrak{M} \models A[\alpha]$:

- $\mathfrak{M} \models (t \equiv s)[\alpha]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $t^{\mathfrak{M}}[\alpha] = s^{\mathfrak{M}}[\alpha]$,
- $\mathfrak{M} \models P t_1 \dots t_n[\alpha]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}[\alpha], \dots, t_n^{\mathfrak{M}}[\alpha])$,
- $\mathfrak{M} \models \neg A[\alpha]$ wtedy i tylko wtedy, gdy nieprawda, że $\mathfrak{M} \models A[\alpha]$,
- $\mathfrak{M} \models (A \vee B)[\alpha]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models A[\alpha]$ lub $\mathfrak{M} \models B[\alpha]$,
- $\mathfrak{M} \models (A \wedge B)[\alpha]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models A[\alpha]$ i $\mathfrak{M} \models B[\alpha]$,
- $\mathfrak{M} \models (A \rightarrow B)[\alpha]$ wtedy i tylko wtedy, gdy nieprawda, że $\mathfrak{M} \models A[\alpha]$ lub $\mathfrak{M} \models B[\alpha]$,
- $\mathfrak{M} \models \forall x A[\alpha]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models A[\alpha \frac{x}{a}]$ dla każdego $a \in M$,
- $\mathfrak{M} \models \exists x A[\alpha]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models A[\alpha \frac{x}{a}]$ dla pewnego $a \in M$,

przy czym

$$\alpha \frac{x}{a}(y) = \begin{cases} \alpha(y) & \text{dla } y \neq x, \\ a & \text{dla } y = x. \end{cases}$$

Formuła A jest **prawdziwa** w $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \models A$, gdy $\mathfrak{M} \models A[\alpha]$ dla każdego wartościowania $\alpha : V \rightarrow M$.

Formuła A jest **tautologią** (lub jest **ogólnie prawdziwa**), $\models A$, gdy $\mathfrak{M} \models A$ dla każdego modelu $\mathfrak{M}$.

Lemat 15. Rozważmy model $\mathfrak{M}$ dla języka L i formułę A tego języka. Wówczas dla dowolnych wartościowań α, β , jeżeli $\alpha(a) = \beta(x)$ dla wszystkich $x \in \text{vf}(A)$, to

$$\mathfrak{M} \models A[\alpha] \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathfrak{M} \models A[\beta].$$

Prosty dowód indukcyjny pozostawiamy jako ćwiczenie.

Ponieważ spełnialność formuły zależy wyłącznie od wartościowania jej zmiennych, dla formuły $A(x_1, \dots, x_n)$ i wartościowania α takiego, że $\alpha(x_i) = a_i$, dla $1 \leq i \leq n$, będziemy pisać

$$\mathfrak{M} \models A(x_1, \dots, x_n)[a_1, \dots, a_n].$$

Lemat 16. Niech $A = A(y_1, \dots, y_n)$. Rozważmy termy $t_1(x_1, \dots, x_m), \dots, t_n(x_1, \dots, x_m)$ takie, że $y_i \in Ff(t_i, A)$ dla $1 \leq i \leq n$. Niech α będzie dowolnym wartościowaniem i przyjmijmy, że $\alpha(x_i) = a_i$ dla $1 \leq i \leq m$. Wtedy

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &\models A(y_1/t_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n/t_n(x_1, \dots, x_m))[a_1, \dots, a_m] \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models A(y_1, \dots, y_n)[t_1^{\mathfrak{M}}[a_1, \dots, a_m], \dots, t_n^{\mathfrak{M}}[a_1, \dots, a_m]]. \end{aligned}$$

Prosty dowód indukcyjny pozostawiamy jako ćwiczenie.

Ustalmy język L . **Aksjomatami rachunku predykatów** (lub **klasycznego rachunku kwantyfikatorów** lub **KRK**) są domknięcia względem wszystkich układów zmiennych formuł danych za pomocą następujących schematów:

- (Q0): domknięcia schematów aksjomatów KRZ w języku $\{\neg, \rightarrow\}$, np. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ itd.
- (Q1): $\forall x A \rightarrow A(t/x)$ dla $x \in Ff(t, A)$,
- (Q2): $\forall x (A \rightarrow B) \rightarrow (\forall x A \rightarrow \forall x B)$,
- (Q3): $A \rightarrow \forall x A$, gdzie $x \notin \text{vf}(A)$,
- (Q4): aksjomaty identyczności: dla dowolnych termów $t_1, t_2, t_3, t'_1, t'_2, t'_3$ i dowolnych symboli funkcyjnych f i relacyjnych P :
 - $t_1 \equiv t_1$,
 - $t_1 \equiv t_2 \rightarrow t_2 \equiv t_1$,
 - $t_1 \equiv t_2 \wedge t_2 \equiv t_3 \rightarrow t_1 \equiv t_3$,
 - $(t_1 \equiv t'_1 \wedge \dots \wedge t_1 \equiv t'_n) \rightarrow (ft_1 \dots t_n \equiv ft'_1 \dots t'_n)$,
 - $(t_1 \equiv t'_1 \wedge \dots \wedge t_1 \equiv t'_n) \rightarrow (Pt_1 \dots t_n \rightarrow Pt'_1 \dots t'_n)$,

Ponadto definiujemy **regułę odrywania**:

$$\frac{A, A \rightarrow B}{B}$$

W szczególności każda teza KRZ jest tautologią KRK.

Twierdzenie 17. Niech Γ będzie zbiorem formuł języka L takim, że zmienna x nie występuje jako zmienna wolna w żadnej formule tego zbioru. Wówczas, dla dowolnej formuły $A(x, \vec{y})$ mamy:

$$\Gamma \vdash A(x, \vec{y}) \Rightarrow \Gamma \vdash \forall x A(x, \vec{y})$$

Dowód. Dowód prowadzimy przez indukcję względem długości formuły A .

- Jeżeli A jest aksjomatem, to $\forall x A$ jest aksjomatem.
- Jeżeli $A \in \Gamma$, to $x \notin \text{vf}(A)$, zatem aksjomatem jest formuła $A \rightarrow \forall x A$. Czyli $\Gamma \vdash \forall x A$.
- Załóżmy, że A otrzymujemy w wyniku zastosowania reguły odrywania względem formuł B i $B \rightarrow A$. Z założenia indukcyjnego

$$\Gamma \vdash \forall x B \text{ oraz } \Gamma \vdash \forall x (B \rightarrow A).$$

Ponadto, na mocy **(Q2)**, $\Gamma \vdash \forall x B \rightarrow \forall x A$. Stąd otrzymujemy

$$\Gamma \vdash \forall x A.$$

□

Lemat 17. Załóżmy, że $x \notin vf(A)$. Wówczas tezę naszego systemu jest:

$$\vdash \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B).$$

Dowód. (1) $\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall x A \rightarrow \forall x B)$, **(Q2)**

(2) $\forall x A \rightarrow (\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow \forall x B)$, ponieważ $\vdash (E \rightarrow (F \rightarrow G)) \rightarrow (F \rightarrow (E \rightarrow G))$

(3) $A \rightarrow \forall x A$, **(Q3)**, $x \notin vf(A)$,

(4) $A \rightarrow (\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow \forall x B)$, z prawa sylogizmu,

(5) $\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B)$, jak w (2).

□

Twierdzenie 18. Niech A i B będą dowolnymi formułami oraz niech C będzie taką formułą, że $x \notin vf(C)$. Niech ponadto Γ będzie takim zbiorem formuł, że x nie występuje jako zmienna wolna w żadnej formule tego zbioru. Wówczas:

(1) $\Gamma \vdash C \rightarrow B \Rightarrow \Gamma \vdash C \rightarrow \forall x B$, $(\frac{C \rightarrow B}{C \rightarrow \forall x B})$,

(2) $\Gamma \vdash A \rightarrow C \Rightarrow \Gamma \vdash \exists x A \rightarrow C$, $(\frac{A \rightarrow C}{\exists x A \rightarrow C})$,

(3) $\Gamma \vdash A \rightarrow \forall x B \Rightarrow \Gamma \vdash A \rightarrow B$, $(\frac{A \rightarrow \forall x B}{A \rightarrow B})$,

(4) $\Gamma \vdash \exists x A \rightarrow B \Rightarrow \Gamma \vdash A \rightarrow B$, $(\frac{\exists x A \rightarrow B}{A \rightarrow B})$.

Dowód. Rozważmy dowody na gruncie Γ :

(1) Załóżmy, że $\Gamma \vdash C \rightarrow B$. Wówczas $\Gamma \vdash \forall x(C \rightarrow B)$. Stąd, ponieważ $x \notin vf(C)$, na mocy poprzedniego Lematu $\Gamma \vdash C \rightarrow \forall x B$.

(2) Kontrapozycja (1).

(3) Załóżmy, że $\Gamma \vdash A \rightarrow \forall x B$. Na mocy **(Q1)** mamy $\vdash \forall x B(x, \vec{y}) \rightarrow B(x, \vec{y})$, ponieważ $x \in Ff(x, B)$. Zatem, na mocy praw KRZ, $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.

(4) Kontrapozycja (3).

□

Lemat 18. Następujące formuły są tezami KRK:

(1) $\forall x A \rightarrow \exists x A$ (prawo egzemplifikacji),

(2) $\forall x A \leftrightarrow A$, $\exists x A \leftrightarrow A$, gdy A jest zdaniem,

(3) $\forall x A(x, \vec{y}) \leftrightarrow \forall z A(z, \vec{y})$, $\exists x A(x, \vec{y}) \leftrightarrow \exists z A(z, \vec{y})$.

Proste dowody indukcyjne zostawiamy jako ćwiczenie.

Twierdzenie 19 (o dedukcji). Niech Γ będzie zbiorem formuł języka L . Wtedy dla dowolnych formuł A i B :

$$\Gamma \vdash A \rightarrow B \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \Gamma, A \vdash B$$

Prosty dowód indukcyjny zostawiamy jako ćwiczenie.

Twierdzenie 20 (o ekstensjonalności). Niech Γ będzie zbiorem zdań oraz niech A będzie dowolną formułą języka L . Niech A^* powstaje z A przez zastąpienie pewnych wystąpień jej podformuły D formułą D' . Wówczas jeżeli $\Gamma \vdash D \leftrightarrow D'$, to $\Gamma \vdash A \leftrightarrow A^*$.

Dowód poprzedzimy lematem:

Lemat 19. *Założmy, że Γ jest zbiorem zdań. Wówczas, dla dowolnych A i B , jeżeli $\Gamma \vdash A \leftrightarrow B$, to $\Gamma \vdash \forall x A \leftrightarrow \forall x B$.*

Dowód. Założmy, że $\Gamma \vdash A \rightarrow B$. Wówczas:

$$\Gamma \vdash \forall x(A \rightarrow B).$$

Stąd

$$\Gamma \vdash \forall x A \rightarrow \forall x B.$$

Analogicznie dowodzimy, że $\Gamma \vdash B \rightarrow A$ pociąga $\Gamma \vdash \forall x B \rightarrow \forall x A$. □

Przechodzimy do dowodu twierdzenia o ekstensjonalności.

Dowód. Dowód prowadzimy przez indukcję względem budowy formuły, ograniczymy się przy tym do jednego przypadku, pozostałe zostawiając jako ćwiczenie. Założmy, że $A = \forall x B$. Wobec założenia indukcyjnego:

$$D \leftrightarrow D' \vdash B \leftrightarrow B^*.$$

Stąd, na mocy lematu:

$$D \leftrightarrow D' \vdash \forall x B \leftrightarrow \forall x B^*$$

czyli

$$D \leftrightarrow D' \vdash A \leftrightarrow A^*.$$

□

Mówimy, że zbiór formuł Γ jest **spełnialny**, gdy istnieje model $\mathfrak{M}$ i wartościowanie $\alpha : V \rightarrow M$ takie, że $\mathfrak{M} \models A[\alpha]$ dla każdej formuły $A \in \Gamma$.

Mówimy, że zbiór zdań Γ jest spełnialny, gdy dla pewnego modelu $\mathfrak{M}$ zachodzi $\mathfrak{M} \models A$ dla $A \in \Gamma$.

Twierdzenie 21 (o istnieniu modelu). *Każdy niesprzeczny zbiór formuł jest spełnialny. W szczególności, każdy niesprzeczny zbiór zdań ma model.*

Dowód tego twierdzenia pomijamy.

Wniosek 8 (twierdzenie o pełności). *Dla dowolnego zbioru zdań Σ i dowolnego zdania A :*

$$\Sigma \vdash A \Leftrightarrow \Sigma \models A.$$