

5. WYKŁAD 5: SEMANTYKA KLASYCZNEGO RACHUNKU ZDAŃ.

Dotychczas rozwinęliśmy klasyczny rachunek na gruncie czysto syntaktycznym, a więc badaliśmy metodę sprawdzania, czy dana formuła B jest dowodliwa na gruncie danego zbioru formuł $A_1, \dots, A_n$. Obecnie skupimy się na innym podejściu do klasycznego rachunku zdań, w którym związki między przesłankami $A_1, \dots, A_n$ a konkluzją B będą opisywane przez "wartości logiczne" zdań $A_1, \dots, A_n$. Zrobimy to z zachowaniem odpowiedniego rygoru formalizmu.

Niech L będzie językiem logiki zdań. Na zbiorze L definiujemy następujące operacje:

- $Neg(A) = \neg A$,
- $Alt(A, B) = A \vee B$,
- $Kon(A, B) = A \wedge B$,
- $Imp(A, B) = A \rightarrow B$.

Algebrę $\mathbf{L} = (L, Neg, Alt, Kon, Imp)$ nazywamy **algebrą języka logiki zdań**. Jest to algebra o typie $\tau_{\mathbf{L}} = (1, 2, 2, 2)$. Algebra $\mathbf{L}$ jest algebrą absolutnie wolną ze zbiorem zmiennych zdaniowych P jako zbiorem wolnych generatorów.

Matrycą (Łukasiewicz, Tarski, 1930) dla języka logiki zdaniowej nazywamy parę

$$\mathcal{M} = (\mathbf{M}, M^*),$$

gdzie $\mathbf{M}$ jest algebrą podobną do algebry języka logiki zdań, zaś zbiór $\emptyset \neq M^* \subset M$ nazywamy zbiorem elementów wyróżnionych matrycy (zakładamy często, że M^* jest jednoelementowy). Piszemy też

$$\mathcal{M} = (M, M^*, F_{\neg}, F_{\wedge}, F_{\vee}, F_{\rightarrow}).$$

Niech $\mathcal{M}$ będzie pewną matrycą dla języka logiki zdań. **Wartościowaniem** w $\mathcal{M}$ nazywamy dowolne odwzorowanie $\varphi : P \rightarrow M$. Każde takie odwzorowanie przedłuża się jednoznacznie do homomorfizmu algebry $\mathbf{L}$ w algebrę $\mathbf{M}$. Homomorfizm ten będziemy również oznaczać przez φ .

Niech A będzie dowolną formułą języka zdań i niech $\mathcal{M}$ będzie matrycą. Ustalmy wartościowanie $\varphi : P \rightarrow M$. Mówimy, że φ **spełnia** A w $\mathcal{M}$, gdy $\varphi(A) \in M^*$. Formułę A nazwiemy **tautologią matrycy** $\mathcal{M}$, gdy A jest spełniona w $\mathcal{M}$ przy każdym wartościowaniu (mówimy wtedy też, że A jest **prawdziwe** w $\mathcal{M}$). Zbiór wszystkich tautologii matrycy $\mathcal{M}$ nazywamy **zawartością** tej matrycy i oznaczamy przez $E(\mathcal{M})$.

Mówimy, że A **wynika logicznie** z B w matrycy $\mathcal{M}$, jeżeli dla każdego wartościowania $\varphi : P \rightarrow M$

$$\text{jeżeli } \varphi(A) \in M^*, \text{ to } \varphi(B) \in M^*.$$

Mówimy, że A i B są **logicznie równoważne** w matrycy $\mathcal{M}$, gdy dla każdego wartościowania $\varphi : P \rightarrow M$

$$\varphi(A) = \varphi(B).$$

Przykłady: (1) Niech $\mathcal{M}_2 = (\{0, 1\}, \{1\}, F_{\neg}, F_{\wedge}, F_{\vee}, F_{\rightarrow})$, gdzie

- $F_{\neg}(x) = 1 - x$ w $\mathbb{Z}$,
- $F_{\wedge}(x, y) = \min\{x, y\}$ w $\mathbb{Z}$,
- $F_{\vee}(x, y) = \max\{x, y\}$ w $\mathbb{Z}$,
- $F_{\rightarrow}(x, y) = \min\{1, 1 - x + y\}$ w $\mathbb{Z}$.

$\mathcal{M}_2$ nazywamy matrycą klasycznej (dwuwartościowej) logiki zdań. Funkcje F spełniają funkcję przybliżenia języka naturalnego. Algebrę matrycy $\mathcal{M}_2$ możemy utożsamić z $\mathbf{B}_2$.

(2) Niech $\mathcal{M}_3 = (\{0, \frac{1}{2}, 1\}, \{1\}, F_{\neg}, F_{\wedge}, F_{\vee}, F_{\rightarrow})$, z funkcjami $F_{\neg}, F_{\wedge}, F_{\vee}, F_{\rightarrow}$ zdefiniowanymi tak, jak przed chwilą. $\mathcal{M}_3$ nazywamy matrycą trójwartościowej logiki zdań Łukasiewicza.

(3) Niech $\mathcal{M}_T = (\tau(\mathbb{R}), \{\mathbb{R}\}, G_{\neg}, G_{\wedge}, G_{\vee}, G_{\rightarrow})$, gdzie $\tau(\mathbb{R})$ oznacza rodzinę wszystkich zbiorów otwartych oraz

- $G_{\neg}(X) = Int(\mathbb{R} \setminus X)$,
- $G_{\wedge}(X, Y) = X \cap Y$,
- $G_{\vee}(X, Y) = X \cup Y$,
- $G_{\rightarrow}(X, Y) = Int(\mathbb{R} \setminus X \cup Y)$.

$\mathcal{M}_T$ nazywamy matrycą topologicznej logiki Tarskiego.

Lemat 12. *Zachodzą następujące tautologie:*

- (1) $p \rightarrow (p \vee q) \in E(\mathcal{M}_2) \cap E(\mathcal{M}_3) \cap E(\mathcal{M}_T)$,
- (2) $p \vee \neg p \in E(\mathcal{M}_2) \setminus E(\mathcal{M}_3) \setminus E(\mathcal{M}_T)$,
- (3) $(p \vee \neg p) \rightarrow q \in E(\mathcal{M}_2) \cap E(\mathcal{M}_T) \setminus E(\mathcal{M}_3)$,
- (4) $(\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)) \in E(\mathcal{M}_2) \cap E(\mathcal{M}_3) \setminus E(\mathcal{M}_T)$,
- (5) $(p \rightarrow q) \neq E(\mathcal{M}_2) \cup E(\mathcal{M}_3) \cup E(\mathcal{M}_T)$.

Dowód. Udowodnimy, dla przykładu, część (1) lematu. Zgodnie z podanymi wcześniej definicjami, tabelki wartości funkcji $F_{\neg}, F_{\wedge}, F_{\vee}, F_{\rightarrow}$ w matrycy $\mathcal{M}_2$ przedstawiają się następująco:

$$\frac{F_{\neg}}{\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}}, \quad \frac{F_{\wedge}}{\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}}, \quad \frac{F_{\vee}}{\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}} \quad \text{oraz} \quad \frac{F_{\rightarrow}}{\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}}.$$

Wobec tego

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow (p \vee q)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	1

i tym samym $p \rightarrow (p \vee q)$ jest tautologią matrycy $\mathcal{M}_2$. Podobnie, tabelki wartości funkcji $F_{\neg}, F_{\wedge}, F_{\vee}, F_{\rightarrow}$ w matrycy $\mathcal{M}_3$ wyglądają tak:

$$\frac{F_{\neg}}{\begin{array}{c|c|c|c} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}}, \quad \frac{F_{\wedge}}{\begin{array}{c|c|c|c} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}}, \quad \frac{F_{\vee}}{\begin{array}{c|c|c|c} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}} \quad \text{oraz} \quad \frac{F_{\rightarrow}}{\begin{array}{c|c|c|c} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}}.$$

Zatem

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow (p \vee q)$
1	1	1	1
1	$\frac{1}{2}$	1	1
1	0	1	1
$\frac{1}{2}$	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
0	0	0	1

i $p \rightarrow (p \vee q)$ jest tautologią matrycy $\mathcal{M}_3$. Na koniec sprawdzamy, że dla zbiorów otwartych $X, Y \subset \mathbb{R}$:

$$Int((\mathbb{R} \setminus X) \cup X \cup Y) = Int(\mathbb{R}) = \mathbb{R},$$

a więc $p \rightarrow (p \vee q)$ jest tautologią matrycy $\mathcal{M}_T$. $\square$

Lemat 13. Niech $A(p_1, \dots, p_n)$ będzie formułą języka logiki zdań i $\mathcal{M}$ niech będzie matrycą dla tego języka. Niech ponadto ϕ, ψ będą dowolnymi wartościowaniami takimi, że

$$\phi(p_i) = \psi(p_i) \text{ dla } 1 \leq i \leq n.$$

Wówczas $\phi(A) = \psi(A)$.

Dowód. Dowód prowadzimy przez indukcję względem budowy A . Jeśli $A = p_i$, to $\phi(A) = \psi(A)$ z założenia.

Jeśli $A = \neg B$, to mamy

$$\phi(A) = \phi(\neg B) = F_{neg}(\phi(B)) = F_{\neg}(\psi(B)) = \psi(\neg B) = \psi(A).$$

Przypadki gdy $A = B \vee C$, $A = B \wedge C$ oraz $A = B \rightarrow C$ pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenia. $\square$

Dowolną funkcję $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ nazywamy **funkcją booleowską**.

Każda formuła języka logiki zdań wyznacza pewną funkcję booleowską f_A taką, że dla dowolnego $\phi : P \rightarrow \{0, 1\}$:

$$\phi(A) = f_A(\phi(p_1), \dots, \phi(p_m)),$$

o ile $A = A(p_1, \dots, p_m)$.

Okazuje się, że twierdzenie odwrotne też jest prawdziwe.

Twierdzenie 11. Każda funkcją booleowską jest wyznaczona przez pewną formułę języka logiki zdań, przy czym w formule tej występują tylko spójniki $\neg, \vee, \wedge$.

Dowód. Niech $f(p_1, \dots, p_k)$ będzie dowolną funkcją booleowską. Rozważmy następującą tabelkę:

	p_1	p_2	$\dots$	p_n	
ϕ_0	0	0	$\dots$	0	$f(0, \dots, 0)$
ϕ_1	0	0	$\dots$	1	$f(0, \dots, 1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
ϕ_k	e_1	e_2	$\dots$	e_n	$f(e_1, \dots, e_n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
ϕ_{2^n-1}	1	1	$\dots$	1	$f(1, \dots, 1)$

W powyższej tabelce mamy $\phi_0(p_i) = 0$. Zdefiniujmy 2^n formuł $C_0, \dots, C_{2^n-1}$ w następujący sposób:

$$C_k = {}^*p_1^k \wedge \dots \wedge {}^*p_n^k,$$

gdzie

$${}^*p_i^k = \begin{cases} p_i, & \text{jeśli } \phi_k(p_i) = 1, \\ \neg p_i, & \text{jeśli } \phi_k(p_i) = 0. \end{cases}$$

Zauważmy, że

$$\phi_k(C_k) = 1$$

oraz

$$\phi_i(C_j) = 0, \text{ jeśli } i \neq j.$$

Definiujemy

$$A(p_1, \dots, p_n) = \bigvee \{C_k : f(\phi_k(p_1), \dots, \phi_k(p_n)) = 1\}.$$

Pokażemy, że $A(p_1, \dots, p_n)$ generuje f . Jeśli $f(\phi_k(p_1), \dots, \phi_k(p_n)) = 1$, to C_k występuje w A i mamy wtedy

$$\phi_k(C_k) = 1.$$

Zatem $\phi_k(A) = 1$. Jeśli $f(\phi_k(p_1), \dots, \phi_k(p_n)) = 0$, to C_k nie występuje w A i mamy wtedy

$$\phi_k(A) = 0.$$

□

Formuła A jest w **alternatywnej postaci normalnej**, gdy A jest postaci

$$B_1 \vee \dots \vee B_n,$$

gdzie każda z formuł B_j jest koniunkcją zmiennych zdaniowych lub negacji zmiennych zdaniowych.

Wniosek 5. *Dowolna formuła jest logicznie równoważna pewnej formule A^* w alternatywnej postaci normalnej.*

Wniosek 6. *Dowolną funkcję booleowską można wygenerować za pomocą formuł zawierających tylko spójniki*

- (1) $\vee, \neg$,
- (2) $\wedge, \neg$,
- (3) $\rightarrow, \neg$.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że:

- (1) $p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$,
- (2) $p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$,
- (3) $p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$.

□

Zbiór formuł Σ jest **spełnialny**, gdy istnieje wartościowanie ϕ takie, że dla każdego $A \in \Sigma$ mamy $\phi(A) = 1$. Mówimy, że Σ jest **skończenie spełnialny**, gdy każdy skończony podzbiór zbioru Σ jest spełnialny.

Twierdzenie 12 (o zwartości). *Zbiór formuł Σ jest spełnialny wtedy i tylko wtedy, gdy Σ jest skończenie spełnialny.*

Dowód. Oczywiście wystarczy pokazać, że jeśli zbiór jest skończenie spełnialny, to jest też spełnialny. Załóżmy więc, że Σ jest skończenie spełnialny. Niech V będzie zbiorem wszystkich zmiennych występujących w formułach zbioru Σ . Rozważmy $\{0, 1\}^V$ jako produkt przestrzeni dyskretnych $\{0, 1\}$. Wobec twierdzenia Tichonowa $\{0, 1\}^V$ jest przestrzenią zwartą. Zbiory

$$B_{p,i} = \{\phi \in \{0, 1\}^V : \phi(p) = i\}$$

stanowią podbazę przestrzeni $\{0, 1\}^V$. Ponadto $B_{p,i}$ są domknięto-otwarte, bo $\{0, 1\}^V \setminus B_{p,0} = B_{p,1}$.

Dla dowolnej formuły $A \in \Sigma$ niech

$$D(A) = \{\phi \in \{0, 1\}^V : \phi(A) = 1\}.$$

Z założenia wiemy, że każdy skończony podzbiór Σ_0 zbioru Σ jest spełnialny. Zatem

$$\bigcap \{D(A) : A \in \Sigma_0\} \neq \emptyset \text{ dla skończonego podzbioru } \Sigma_0 \subset \Sigma.$$

Zbiory $D(A)$ są zbiorami domknięto-otwartymi (jako skończone sumy skończonych przekrojów zbiorów podbazowych). Zatem

$$\bigcap \{D(A) : A \in \Sigma\} \neq \emptyset,$$

a zatem Σ jest spełnialny. □

Przypomnijmy raz jeszcze aksjomaty klasycznego rachunku zdań:

- (1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ (prawo poprzedzania),
- (2) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ (sylogizm Fregego),
- (3) $A \wedge B \rightarrow A$,
- (4) $A \wedge B \rightarrow B$,
- (5) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C)))$,
- (6) $A \rightarrow A \vee B$,
- (7) $B \rightarrow A \vee B$,
- (8) $(B \rightarrow A) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow (B \vee C \rightarrow A))$,
- (9) $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ (prawo Dunsza Szkota),
- (10) $(A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$ (prawo redukcji do absurdu),
- (11) $\neg \neg A \rightarrow A$ (mocne prawo podwójnego przeczenia);

Stwierdzenie 9. *Wszystkie aksjomaty są tautologiami w matrycy $\mathcal{M}_2$. Reguła odrywania jest regułą niezawodną w $\mathcal{M}_2$, czyli każda teza systemu klasycznego rachunku zdań jest tautologią matrycy $\mathcal{M}_2$.*

Dowód. Sprawdzimy, dla przykładu, aksjomat (1):

A	B	$B \rightarrow A$	$A \rightarrow (B \rightarrow A)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1

□

Niech L będzie językiem KRZ. rozważmy relację $\sim \subset L^2$:

$$A \sim B \text{ wtedy i tylko wtedy gdy } \vdash A \leftrightarrow B.$$

Stwierdzenie 10. *Relacja $\sim$ jest równoważnością*

Dowód. Wobec rezultatów udowodnionych na ostatnim wykładzie:

- zwrotność zachodzi, ponieważ mamy $\vdash A \leftrightarrow A$ wobec Lematu 1,
- symetria zachodzi, ponieważ mamy $\vdash A \leftrightarrow B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\vdash B \leftrightarrow A$ wobec definicji,
- przechodniość zachodzi, ponieważ mamy, że jeśli $\vdash A \leftrightarrow B$ oraz $\vdash B \leftrightarrow C$, to $\vdash A \leftrightarrow C$ wobec twierdzenia o ekstensjonalności.

□

Oznaczmy przez $L^\sim$ zbiór klas abstrakcji relacji $\sim$. Klasy abstrakcji oznaczać będziemy po prostu przez $[A]$. W zbiorze $L^\sim$ definiujemy relację

$$[A] \leq [B] \text{ wtedy i tylko wtedy gdy } \vdash A \rightarrow B.$$

Wobec twierdzenia o ekstensjonalności, relacja powyższa jest dobrze określona. Pokażemy jednak coś znacznie silniejszego.

Twierdzenie 13. $(L^\sim, \leq)$ jest dystrybutywną kratą komplementarną.

Dowód. Sprawdzenie, że $\leq$ jest relacją porządku, pozostawiamy czytelnikowi jako proste ćwiczenie.

Pokażemy, że $[A] \cap [B] = [A \wedge B]$. Istotnie, mamy:

$$\vdash A \wedge B \rightarrow A,$$

$$\vdash A \wedge B \rightarrow B.$$

Zatem $[A \wedge B] \leq [A]$ oraz $[A \wedge B] \leq [B]$. Niech $[C] \leq [A]$ oraz $[C] \leq [B]$. Wtedy $\vdash C \rightarrow A$ oraz $\vdash C \rightarrow B$. Ponadto

$$\vdash (C \rightarrow A) \rightarrow ((C \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow A \wedge B)).$$

Stąd $\vdash C \rightarrow A \wedge B$, co oznacza $[C] \leq [A \wedge B]$.

Pokażemy, że $[A] \cup [B] = [A \vee B]$. Istotnie, mamy:

$$\vdash A \rightarrow A \vee B,$$

$$\vdash B \rightarrow A \vee B.$$

Zatem $[A] \leq [A \vee B]$ oraz $[B] \leq [A \vee B]$. Niech teraz $[A] \leq [C]$ oraz $[B] \leq [C]$. Wtedy $\vdash A \rightarrow C$ oraz $\vdash B \rightarrow C$. Ponadto:

$$\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)).$$

Stąd $\vdash A \vee B \rightarrow C$, co oznacza $[A \vee B] \leq [C]$.

Dystrybutywność wynika wprost z udowodnionych ostatnio tez:

$$A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C),$$

oraz

$$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C).$$

Pokażemy, że $1 = [A]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\vdash A$. Istotnie, założmy, że $1 = [A]$. Wtedy dla dowolnej formuły B mamy $\vdash B \rightarrow A$, w szczególności dla dowolnej tezy. Stosując regułę odrywania otrzymujemy, że $\vdash A$. Na odwrót, założmy, że $\vdash A$. Niech B będzie dowolną formułą. Mamy wówczas

$$\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A).$$

Stąd $\vdash B \rightarrow A$, czyli $[B] \leq [A]$, a zatem $[A] = 1$.

Pokażemy, że $0 = [A]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\vdash \neg A$. Istotnie, założmy, że $0 = [A]$. Wtedy dla dowolnej formuły B mamy $\vdash A \rightarrow B$, w szczególności dla $B = \neg A$ mamy $\vdash A \rightarrow \neg A$. Ponadto:

$$\vdash (A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A.$$

Stosując regułę odrywania otrzymujemy, że $\vdash \neg A$. Na odwrót, założmy, że $\vdash \neg A$. Niech B będzie dowolną formułą. Mamy wówczas

$$\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B).$$

Stąd $\vdash A \rightarrow B$, czyli $[A] \leq [B]$, a zatem $[A] = 0$.

Na koniec pokażemy, że $\neg[A] = [\neg A]$. Istotnie, mamy

$$[A] \cup [\neg A] = [A \vee \neg A] = 1,$$

$$[A] \cap [\neg A] = [A \wedge \neg A] = 0.$$

□

Algebrę $(L^\sim, \leq)$ nazywamy **algebrą Lindenbauma** KRZ. Działania w $(L^\sim, \leq)$ określone są następująco:

- $[A] \cap [B] = [A \wedge B],$

- $[A] \cup [B] = [A \vee B]$,
- $-[A] = [\neg A]$,
- $1 = [p \vee \neg p]$,
- $0 = [p \wedge \neg p]$.

W dalszym ciągu rozważać będziemy algebrę Boole'a jako podobną do algebry języka KRZ, czyli algebrę postaci

$$(B, -, \cup, \cap, \Rightarrow),$$

gdzie

$$x \Rightarrow y = -x \cup y.$$

W szczególności zauważmy, iż w algebrze Lindenbauma:

$$[A] \Rightarrow [B] = -[A] \cup [B] = [\neg A \vee B] = [A \rightarrow B].$$

Twierdzenie 14 (o zgodności). *Każda teza KRZ jest tautologią matrycy $\mathcal{M}_2$.*

Dowód. Zauważyliśmy już, że każdy aksjomat jest tautologią i że zbiór tautologii jest domknięty na regułę odrywania. Dowód przeprowadzimy przez indukcję ze względu na długość tezy. Niech $\vdash A$ i niech $A_1, \dots, A_l = A$ będzie dowodem A . Jeśli $l = 1$, to $A_1 = A$ jest aksjomatem, a więc tautologią. Załóżmy, że $i > 1$ i że dla $j < i$ A_j są tautologiami. A zatem A_i jest aksjomatem, a więc tautologią, albo dla pewnych $j, k < i$ mamy

$$A_k = A_j \rightarrow A_i, \dots, A_j, \dots, A_j \rightarrow A_i, \dots, A_i.$$

Z założenia indukcyjnego A_j oraz $A_j \rightarrow A_i$ są tautologiami, a zatem A_i jest tautologią. $\square$

Twierdzenie 15 (o pełności). *Każda tautologia $\mathcal{M}_2$ jest tezą KRZ.*

Dowód twierdzenia poprzedzimy lematem. Oznaczmy przez AL algebrę Lindenbauma KRZ.

Lemat 14. *Niech ϕ będzie homomorfizmem AL w $\mathbf{B}_2$. Niech $\psi : P \rightarrow \{0, 1\}$ będzie wartościowaniem takim, że*

$$\psi(p) = \phi([p]) \text{ dla } p \in P.$$

Wówczas

$$\psi(A) = \phi([A]) \text{ dla dowolnej formuły } A.$$

Wartościowanie takie jak w lemacie nazywać będziemy **indukowanym** przez ϕ .

Dowód. Dowód prowadzimy przez indukcję względem budowy formuły A . Zauważmy na wstępie, że ψ przedłuża się jednoznacznie do homomorfizmu algebry języka KRZ w $\mathbf{B}_2$.

Założmy, że A jest zmienną, $A = p$ – wówczas twierdzenie jest prawdziwe w myśl założenia.

Założmy, że $A = \neg B$. Wówczas:

$$\psi(A) = \psi(\neg B) = -\psi(B) = -\phi([B]) = \phi(-[B]) = \phi([\neg B]) = \phi([A]).$$

Przypadki, gdy $A = B \wedge C$, $A = B \vee C$ oraz $A = B \rightarrow C$ pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie. $\square$

Przechodzimy teraz do dowodu twierdzenia o pełności. Prezentowany dowód pochodzi z 1951 roku i jest autorstwa Rasiowej i Sikorskiego.

Dowód. Załóżmy, że $\not\models A$. Pokażemy, że $A \notin E(\mathcal{M}_2)$. Istotnie, skoro $\not\models A$, to w AL mamy, że $[A] \neq 1$. Zatem $-[A] \neq 0$, czyli $[\neg A] \neq 0$. Wobec twierdzenia o istnieniu ultrafiltru, istnieje ultrafiltr F algebry AL zawierający $[\neg A]$. W szczególności $AL/F \cong \mathbf{B}_2$.

Niech ψ będzie wartościowaniem indukowanym przez kanoniczny homomorfizm $\kappa : AL \rightarrow AL/F$. Wówczas

$$\psi(\neg A) = \kappa([\neg A]) = 1,$$

a zatem $\psi(A) = 0$, czyli $A \notin E(\mathcal{M}_2)$. $\square$

Wniosek 7. *KRZ jest rozstrzygalny w intuicyjnym sensie, tzn. istnieje efektywna procedura dająca odpowiedź, czy $\vdash A$ czy $\nvdash A$.*

Twierdzenie 16 (Malcev). *Niech Σ będzie dowolnym zbiorem formuł języka KRZ. Wówczas Σ jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy Σ jest spełnialny.*

Dowód. ($\Leftarrow$) Załóżmy, że Σ jest sprzeczne. Zatem pewien jego skończony podzbiór Σ' jest sprzeczny. Mamy

$$\Sigma' \vdash A \wedge A'$$

dla pewnej formuły A . Niech $B = \bigwedge\{C : C \in \Sigma'\}$. Na mocy twierdzenia o dedukcji:

$$\vdash B \rightarrow (A \wedge \neg A).$$

Z twierdzenia o zgodności

$$B \rightarrow (A \wedge \neg A) \in E(\mathcal{M}_2),$$

czyli dla każdego wartościowania $\phi : P \rightarrow \{0, 1\}$ mamy

$$\phi(B \rightarrow (A \wedge \neg A)) = 1.$$

Ale zawsze mamy również

$$\phi(A \wedge \neg A) = 0.$$

Stąd $\phi(B) = 0$ dla każdego wartościowania ϕ , czyli Σ' jest niespełnialny, a więc i Σ jest niespełnialny.

($\Rightarrow$) Załóżmy, że Σ jest niespełnialny. Z twierdzenia o zwartości, pewien skończony podzbiór Σ' zbioru Σ jest niespełnialny. Niech

$$B = \bigwedge\{C : C \in \Sigma'\}.$$

Stąd $\phi(B) = 0$ dla każdego wartościowania ϕ , więc B jest kontrtautologią. A zatem $\neg B \in E(\mathcal{M}_2)$.

Stąd, na mocy twierdzenia o pełności, $\vdash \neg B$. Ale

$$\Sigma' \vdash C \text{ dla } C \in \Sigma'$$

więc w szczególności

$$\Sigma' \vdash B.$$

Zatem $\Sigma' \vdash B \wedge \neg B$, czyli Σ' jest sprzeczny, a więc i Σ jest sprzeczny. $\square$