

3. WYKŁAD 3: FILTRY I ULTRAFILTRY.

Niepusty podzbiór F uniwersum algebry Boole'a $\mathbf{B}$ nazywamy **filtrem**, gdy

- (1) $\forall x, y \in F (x \cap y \in F)$,
- (2) $\forall x \in F \forall y \in B (x \leq y \Rightarrow F)$.

Przykłady:

- (1) Uniwersum dowolnej algebry Boole'a jest filtrem (filtrem niewłaściwym).
- (2) $\{1\}$.
- (3) Niech $a \in B$. Wtedy

$$\{x \in B : a \leq x\}$$

jest filtrem (filtr generowany przez element a , filtr główny).

- (4) Niech $\phi : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ będzie homomorfizmem algebr Boole'a. Wtedy:

$$F_\phi = \{a \in A : \phi(a) = 1\}$$

jest filtrem w $\mathbf{A}$.

Uwaga 1. Rozważamy wyłącznie filtry w algebrach Boole'a.

Uwaga 2. F jest filtrem właściwym wtedy i tylko wtedy, gdy $0 \notin F$.

Dowód. $(\Rightarrow)$: Dowód prowadzimy przez kontrapozycję. Załóżmy, że $0 \in F$. Wówczas $a \in F$ dla każdego a , bo $0 \leq a$.

$(\Leftarrow)$: Załóżmy, że F jest niewłaściwy. Wówczas, w szczególności, $0 \in F$. □

Niech $\mathbf{B}$ będzie algebrą Boole'a. Zbiór $X \subset B$ jest **scentrowany** (lub ma **własność iloczynu skończonego**), gdy dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in X$ jest

$$a_1 \cap \dots \cap a_n \neq 0.$$

Twierdzenie 4. Każdy zbiór scentrowany można rozszerzyć do filtru właściwego.

Dowód. Niech $X \subset B$ będzie zbiorem scentrowanym algebry Boole'a $\mathbf{B}$. Rozważmy zbiór:

$$F_X = \{a \in B : \text{dla pewnych } x_1, \dots, x_n \in X, a \geq x_1 \cap x_2 \cap \dots \cap x_n\}.$$

Sprawdzamy, że F_X jest filtrem. Filtr ten nazywamy **filtrem generowanym przez X** , czyli najmniejszym filtrem zawierającym X . Oczywiście $X \subset F_X$.

Pokażemy, że F_X jest filtrem właściwym. Gdyby tak nie było, to $0 \in F_X$, czyli

$$\text{dla pewnych } x_1, \dots, x_n \in X, 0 \geq x_1 \cap x_2 \cap \dots \cap x_n$$

co jest sprzeczne z założeniem scentrowania zbioru X . □

Filtr F algebry Boole'a $\mathbf{B}$ nazywamy **maksymalnym**, gdy F jest elementem maksymalnym względem relacji $\subset$ w rodzinie filtrów właściwych algebry $\mathbf{B}$.

Twierdzenie 5 (Tarski, 1930³). Każdy filtr właściwy algebry Boole'a można rozszerzyć do filtru maksymalnego.

³Jest to twierdzenie znane jako BPI (Boolean Prime Ideal Theorem); twierdzenie to jest słabsze od pewnika wyboru, ale dla prostoty dowodu poprowadzimy go z wykorzystaniem lematu Kuratowskiego-Zorna

Dowód. Niech F będzie filtrem właściwym algebry Boole'a $\mathbf{B}$. Rozważmy

$$\mathcal{F} = \{G : G \text{ jest filtrem właściwym w } \mathbf{B} \text{ oraz } F \subset G\}.$$

Ponieważ $F \in \mathcal{F}$, więc $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

Pokażemy, że każdy łańcuch w $\mathcal{F}$ ma ograniczenie górne w $\mathcal{F}$. Niech $\mathcal{L}$ będzie łańcuchem w $\mathcal{F}$. Rozważmy $\bigcup \mathcal{L}$. Pokażemy, że $\bigcup \mathcal{L} \in \mathcal{F}$. Istotnie, zauważmy, że $\bigcup \mathcal{L}$ jest filtrem. Niech bowiem $a, b \in \bigcup \mathcal{L}$. Wtedy $a \in G_a, b \in G_b$, dla pewnych $G_a, G_b \in \mathcal{L}$. Możemy zakładać, że $G_a \subset G_b$. Wobec tego $a, b \in G_b$. Stąd $a \cap b \in G_b \subset \bigcup \mathcal{L}$. Dalej, niech $a \in \bigcup \mathcal{L}$ i niech $x \in B$ będzie takie, że $a \leq x$. Ale $a \in G_a$ dla pewnego $G_a \in \mathcal{L}$, skąd $x \in G_a \subset \bigcup \mathcal{L}$.

Zauważmy następnie, że $\bigcup \mathcal{L} \neq B$. Istotnie, gdyby $0 \in \bigcup \mathcal{L}$, to wówczas $0 \in G_a$ dla pewnego $G_a \in \mathcal{F}$, co jest sprzecznością.

Na koniec zauważmy jeszcze, że $F \subset \bigcup \mathcal{L}$. Tym samym pokazaliśmy, że $\bigcup \mathcal{L} \in \mathcal{F}$, więc na mocy lematu Kuratowskiego-Zorna w rodzinie $(\mathcal{F}, \subset)$ istnieje element maksymalny. $\square$

Wniosek 1. (1) *Każdy zbiór scentrowany algebry Boole'a $\mathbf{B}$ można rozszerzyć do filtru maksymalnego.*

(2) *Każdy element $a \neq 0$ należy do pewnego filtru maksymalnego.*

(3) *Dla dowolnych a, b takich, że $a \neq b$ istnieje filtr maksymalny F taki, że*

$$(a \in F \wedge b \notin F) \vee (b \in F \wedge a \notin F).$$

Lemat 1. *W dowolnej algebrze Boole'a:*

- (1) $x \cup 0 = x$,
- (2) $x \cup 1 = 1$,
- (3) $-(x \cap y) = -x \cup -y$.

Twierdzenie 6. *Niech F będzie filtrem w algebrze Boole'a $\mathbf{B}$. Wówczas relacja $\sim_F$ dana wzorem:*

$$x \sim_F y \Leftrightarrow \text{istnieje } u \in F : x \cap u = y \cap u$$

jest kongruencją algebry.

Dowód. Relacja $\sim_F$ jest równoważnością, co łatwo sprawdzić: jest zwrotna, czyli $x \sim_F x$, bo $x \cap 1 = x \cap 1$ i $1 \in F$; jest symetryczna, czyli $x \sim_F y \Rightarrow y \sim_F x$, bo $x \cap u = y \cap u$ jest równoważne $y \cap u = x \cap u$; jest też symetryczna, założmy bowiem, że $x \sim_F y$ oraz $y \sim_F z$, czyli że dla pewnych $u, w \in F$:

$$x \cap u = y \cap u \text{ oraz } y \cap w = z \cap w.$$

Rozważmy element $u \cap w \in F$. Mamy:

$$x \cap (u \cap w) = (x \cap u) \cap w = (y \cap u) \cap w = (y \cap w) \cap u = (z \cap w) \cap u = z \cap (u \cap w),$$

co kończy dowód przechodności.

Założmy, że $x \sim_F x'$ i $y \sim_F y'$. Pozostaje wykazać, że

$$(x \cap y) \sim_F (x' \cap y'), (x \cup y) \sim_F (x' \cup y') \text{ i } -x \sim_F -x'.$$

Pokażemy, dla przykładu, ostatnią własność. Istotnie:

$$x \cap u = x' \cap u$$

oznacza, że również

$$-(x \cap u) = -(x' \cap u),$$

czyli

$$-x \cup -u = -x' \cup -u,$$

a stąd

$$u \cap (-x \cup -u) = u \cap (-x' \cup -u),$$

a więc

$$-x \cap u = -x' \cap u.$$

□

Uwaga 3. Niech $\mathbf{B}$ będzie algebrą Boole'a i niech $\sim$ będzie jej kongruencją. Wtedy

$$F_{\sim} = \{x \in B : x \sim 1\}$$

jest filtrem. Ponadto $\sim_{F_{\sim}} = \sim$.

Jeżeli F jest filtrem algebry Boole'a $\mathbf{B}$, to zamiast $\mathbf{B}/\sim_F$ będziemy pisać po prostu $\mathbf{B}/F$.

Filtr F algebry Boole'a $\mathbf{B}$ nazywamy **pierwszym**, gdy dla dowolnych $a, b \in B$, jeżeli $a \cup b \in F$, to $a \in F$ lub $b \in F$.

Twierdzenie 7. Niech F będzie filtrem maksymalnym algebry Boole'a $\mathbf{B}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- (1) F jest maksymalny,
- (2) F jest pierwszy,
- (3) dla dowolnego $a \in B$ albo $a \in F$, albo $-a \in F$,
- (4) $\mathbf{B}/F \cong \mathbf{B}_2$.

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2) : Przypuśćmy, że F nie jest filtrem pierwszym. Niech a, b będą takie, że

$$a \cup b \in F \text{ oraz } a \notin F, b \notin F.$$

Rozważmy zbiór $G = \{x \in B : \text{istnieje } u \in F : x \geq a \cap u\}$. Oczywiście $F \subset G$. Pokażemy, że $G \neq B$, w szczególności $b \notin G$. Faktycznie, gdyby $b \in G$ to mielibyśmy $b \geq a \cap u$, dla pewnego $u \in F$. Stąd $b = b \cup (a \cap u) = \underbrace{(b \cup a)}_{\in F} \cap \underbrace{(b \cup u)}_{\geq u \in F} \in F$, co jest sprzecznością. Zatem F nie może być filtrem maksymalnym, co również byłoby sprzecznością.

(2) $\Rightarrow$ (3) : Załóżmy, że F jest pierwszy. Wówczas

$$a \cup -a = 1 \in F \text{ dla dowolnego } a \in B,$$

a stąd $a \in F$ lub $-a \in F$ i nie może być jednocześnie $a \in F$ oraz $-a \in F$.

(3) $\Rightarrow$ (4) : Rozważmy algebrę ilorazową $\mathbf{B}/F$, gdzie F jest filtrem mającym własność (3). W $\mathbf{B}/F$ mamy:

$$1 = F \text{ oraz } 0 = \{-a : a \in F\}.$$

Istotnie, zobaczmy, że $1 = F$. Ustalmy $a \in F$. Wówczas $a \sim_F 1$, bo $a \cap a = a \cap 1$. Na odwrót, założmy, że $a \sim_F 1$. Wówczas dla pewnego $u \in F$ zachodzi $a \cap u = u \cap 1 = u$, skąd $u \leq a$, czyli $a \in F$.

Dalej, sprawdźmy, że $0 = \{-a : a \in F\}$. Faktycznie:

$$\begin{aligned} 0 &= \{x \in B : x \sim_f 0\} = \{x \in B : \text{istnieje } u \in F : x \cap u = 0\} \\ &= \{x \in B : u \leq -x\} = \{-x : x \in F\}. \end{aligned}$$

Ustalmy teraz $a \in B$. Mamy, że $a \in F$ i wtedy $[a] = 1$, albo $-a \in F$ i wtedy $[a] = 0$.

(4) $\Rightarrow$ (1) : Przypuśćmy, że F nie jest maksymalny, czyli że istnieje filtr właściwy G taki, że $F \subsetneq G$. Niech $a \in G \setminus F$. Rozważmy $\mathbf{B}/F$. Mamy:

$$[a] \neq 1 \text{ oraz } [a] \neq 0,$$

bo gdyby $[a] = 0$, to $-a \in F \subset G$, ale $a \in G$ i G jest filtrem właściwym. Stąd otrzymujemy sprzeczność. $\square$

Dowolny filtr właściwy spełniający jeden z powyższych równoważnych warunków nazywamy **ultrafiltrem**.

Interesować nas będą głównie ultrafiltry w algebrach potęgowych. Niech $I \neq \emptyset$. Mówimy, że F jest **filtrem nad zbiorem** I , gdy F jest filtrem w algebrze potęgowej $(2^I, \subset)$. Wprost z definicji filtrem głównym w algebrze potęgowej będzie

$$F_A = \{X : A \subset X\}.$$

Uwaga 4. Niech F będzie filtrem głównym nad I . Wówczas F jest ultrafiltrem wtedy i tylko wtedy, gdy F jest generowany przez zbiór jednoelementowy.

Dowód. $(\Rightarrow)$: Niech X generuje F i przypuścimy, że $x, y \in X$ dla $x \neq y$. Rozważmy $\{x\}$. Ponieważ F jest ultrafiltrem, więc:

$$\{x\} \in F \text{ albo } -\{x\} \in F.$$

W pierwszym przypadku $\{x\} \cap X \in F$, czyli $\{x\} \in F$, co daje sprzeczność. W drugim przypadku sprzeczność otrzymujemy wobec faktu, że $X \setminus \{x\} \in F$.

$(\Leftarrow)$: Załóżmy, że $F = \{Y \subset I : \{a\} \subset Y\} = \{Y : a \in Y\}$. Weźmy dowolny $Z \subset I$. Mamy:

$$a \in Z \text{ lub } a \notin Z, \text{ czyli } a \in -Z.$$

W pierwszym przypadku $Z \in F$, a w drugim $-Z \in F$. Wobec tego F jest ultrafiltrem. $\square$

Uwaga 5. Jeśli F jest ultrafiltrem niegłównym nad I , to do F nie należy żaden zbiór skończony.

Dowód. Załóżmy, że F jest filtrem niegłównym w pewnej algebrze potęgowej nad I i przypuścimy, że pewien zbiór skończony należy do F . Niech K będzie takim zbiorem o minimalnej liczbie elementów. Przypuścimy ponadto, że dla $x \neq y$ mamy $x, y \in K$. Wówczas

$$\{x\} \notin F,$$

ponieważ K był minimalnym zbiorem skończonym należącym do F oraz

$$-\{x\} \notin F,$$

ponieważ w przeciwnym razie $-\{x\} \cap K \in F$, co daje sprzeczność z minimalnością K . Oznacza to, że F nie mógłby być ultrafiltrem. $\square$

Uwaga 6. W dowolnej nieskończonej algebrze potęgowej istnieją ultrafiltry niegłówne.

Dowód. Niech I będzie zbiorem nieskończonym. Rozważmy

$$F = \{X \subset I : X \text{ jest zbiorem koskończonym}\}.$$

Z łatwością sprawdzamy, że F jest filtrem. F jest filtrem właściwym, bo $\emptyset \notin F$. F możemy rozszerzyć do ultrafiltru. Z kolei łatwo sprawdzamy, że każdy ultrafiltr rozszerzający F jest niegłówny. $\square$