2. Wykład 2: algebry Boole'a, kraty i drzewa.

2.1. Algebra Boole'a. [1] Ważnym dla nas przykładem algebr są **algebry Boole'a,** czyli algebry $\mathbf{B} = (B, \cap, \cup, -, 0, 1)$ typu $(2, 2, 1, 0, 0)$ spełniające własności:

(1) $x \cup y = y \cup x$, $x \cap y = y \cap x$,
(2) $x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z$, $x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z$,
(3) $x \cup (x \cap y) = x$, $x \cap (x \cup y) = x$,
(4) $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$, $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$,
(5) $x \cup -x = 1$, $x \cap -x = 0$

Przykład 1: Dwuelementowa algebra Boole'a $\mathbf{B}_2 = (\{0, 1\}, \cap, \cup, -, 0, 1)$, gdzie

- $x \cap y = \min\{x, y\}$,
- $x \cup y = \max\{x, y\}$,
- $-x = 1 - x \mod 2$.

Przykład 2: Algebra potęgowa $\mathbf{P}(X) = (2^X, \cap, \cup, -, \emptyset, X)$, gdzie X jest niepustym zbiorem, a $\cap, \cup$ i $-$ są operacjami mnogościowymi w 2^X. Każda skończona algebra Boole'a jest izomorficzna z pewną algebrą potęgową.

Przykład 3: Niech $Z(X) = \{Y \subset X : Y \text{ jest skończony} \vee X \setminus Y \text{ jest skończony}\}$. Wówczas $\mathbf{Z}(X) = (Z(X), \cap, \cup, -, \emptyset, X)$, gdzie X jest niepustym zbiorem, a $\cap, \cup$ i $-$ są operacjami mnogościowymi w $Z(X)$. W szczególności, gdy X jest zbiorem przeliczalnym, to jest to przeliczalna algebra Boole'a. Widzimy więc, że nie każda algebra Boole'a jest izomorficzna z algebrą potęgową.

Twierdzenie 1 (Stone, 1936)**.** [2] *Każda algebra Boole'a jest izomorficzna z pewną podalgebrą pewnej algebry potęgowej.*

Stwierdzenie 1. *W dowolnej algebrze Boole'a zachodzą następujące związki:*

(1) $x \cup x = x$, $x \cap x = x$
(2) $x \cup 0 = x$, $x \cap 1 = x$

Dowód. (1) $x \cap (x \cup x) = x$. Ponadto $x \cup (x \cap (x \cup x)) = x$, Stąd $x \cup x = x$. Podobnie dowodzimy $x \cap x = x$.
(2) $x \cap -x = 0$. Stąd $x \cup 0 = x \cup (x \cap -x) = 0$. Podobnie dowodzimy $x \cap 1 = x$. ☐

Stwierdzenie 2. *W dowolnej algebrze Boole'a mamy*

$$x \cap y = x \Leftrightarrow x \cup y = y$$

Dowód. ($\Rightarrow$) Załóżmy, że $x \cap y = x$. Wówczas $x \cup y = (x \cap y) \cup y = y$.
($\Leftarrow$) Załóżmy, że $x \cup y = y$. Wówczas $x \cap y = x \cap (x \cup y) = x$. ☐

W dowolnej algebrze Boole'a definiujemy relację

$$x \leq y \Leftrightarrow x \cap y = x (\text{lub równoważnie } x \cup y = y)$$

Stwierdzenie 3. *Relacja $\leq$ jest porządkiem na uniwersum algebry* $\mathbf{A}$.

Dowód. Relacja $\leq$ jest zwrotna: $x \cap x = x$, a zatem $x \leq x$.
Relacja $\leq$ jest antysymetryczna: załóżmy, że $x \leq y$ oraz $y \leq x$. Wówczas $x \cap y = x$ oraz $y \cap x = x$. Zatem $y = y \cap x = x \cap y = x$ i $y = x$.
Relacja $\leq$ jest przechodnia: załóżmy, że $x \leq y$ oraz $y \leq z$. Wówczas $x \cap y = x$ oraz $y \cap z = y$. Stąd $x \cap z = (x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z) = x \cap y = x$. ☐

---

[1] George Boole (ur. 2 listopada 1815 r. Lincoln, Anglia, zm. 8 grudnia 1864 r. w Ballintemple (hrabstwo Corcaigh), Irlandia) - angielski matematyk, filozof i logik.

[2] Marshall Harvey Stone (8 kwietnia 1903, New York City – 9 stycznia 1989, Madras, India)

Stwierdzenie 4. *Każdy skończony podzbiór uniwersum algebry Boole'a ma kres w sensie $\leq$.*

Dowód. Wystarczy pokazać, że dowolne dwuelementowe podzbiory mają kresy, dalej dowód przebiega przez indukcję. Ograniczymy sie do pokazania, że zbiór $\{x, y\}$ ma kres dolny. Dokładniej, pokażemy, że $x \cap y = \inf_{\leq}\{x, y\}$, czyli że

(1) $x \cap y \leq x$ oraz $x \cap y \leq y$,
(2) dla dowolnego a jeśli $a \leq x$ i $a \leq y$, to $a \leq x \cap y$.

Istotnie:

(1) $(x \cap y) \cap x = (x \cap x) \cap y = x \cap y$, czyli $x \cap y \leq x$. Podobnie sprawdzamy, że $x \cap y \leq y$.
(2) Niech $a \leq x$ i $a \leq y$, czyli $a \cap x = a$ i $a \cap y = a$. Wówczas

$$a \cap (x \cap y) = (a \cap x) \cap y = a \cap y = a,$$

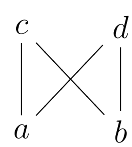
czyli $a \leq x \cap y$.

$\square$

2.2. **Kraty.** **Kratą** nazywamy parę $(K, \leq)$, gdzie $K \neq \emptyset$ i $\leq$ jest porządkiem takim, że dowolny skończony podzbiór zbioru K ma kresy. Tradycyjnie oznaczamy

$$\inf_{\leq}\{x, y\} = x \wedge y \text{ oraz } \sup_{\leq}\{x, y\} = x \vee y.$$

Przykład 1: $(2^X, \subset)$.
Przykład 2: $(\mathbb{N}, \leq)$.
Przykład 3: $(\mathbb{N}, |)$; tutaj mamy w szczególności $n \wedge m = NWD(n, m)$, $n \vee m = NWW(n, m)$.
Przykład 4: Porządkiem, który nie jest kratowy, jest na przykład



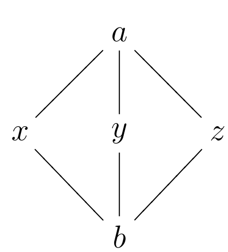
Tutaj $\{a, b\}$ i $\{c, d\}$ są nieporównywalne, więc nie mają kresów. Obrazek ten wyjaśnia też nazwę "krata".

Kratę $(K, \leq)$ nazywamy **dystrybutywną** (lub **rozdzielczą**), jeśli dla dowolnych $x, y, z \in K$ mamy:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Przykład 1: $(2^X, \subset)$.
Przykład 2: $(\mathbb{N}, \leq)$.
Przykład 3: $(\mathbb{N}, |)$
Przykład 4: Nie każda krata musi być dystrybutywna, na przykład następująca krata nie jest:



Przykład 5: Stwierdzenie 4 pokazuje, że każda algebra Boole'a jest kratą dystrybutywną.

Kratą komplementarną nazywamy kratę $(K, \leq)$ taką, że

(1) w K istnieją element największy $\top$ i element najmniejszy $\bot$,
(2) dla dowolnego $x \in K$ istnieje $y \in K$ taki, że

$$x \wedge y = \bot \text{ oraz } x \vee y = \top.$$

Element y nazywamy wówczas **dopełnieniem** elementu x.

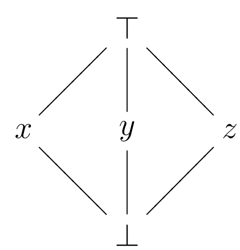
Stwierdzenie 5. *Niech* $\mathbf{B}$ *będzie algebrą Boole'a. Wówczas* $(B, \leq)$ *jest kratą dystrybutywną i komplementarną.*

Dowód. Dystrybutywność już udało nam się przedyskutować, pozostaje wykazać komplementarność.

(1) Pokazaliśmy, że $x \cup 0 = x$ oraz $x \cap 1 = x$. W szczególności $x \cap 0 = (x \cup 0) \cap 0 = 0$, a zatem $0 \leq x$ oraz $x \leq 1$ dla $x \in K$, a więc 0 jest elementem najmniejszym, a 1 elementem największym.
(2) Wobec ostatniego z aksjomatów algebry Boole'a: $x \cup -x = 1$ oraz $x \cap -x = 0$.

□

Przykład: W kracie komplementarnej, która nie jest dystrybutywna, nie każdy element musi mieć jednoznacznie wyznaczone dopełnienie, na przykład w "chińskiej latarni":



Okazuje się, że faktycznie wystarczy założyć, aby krata była jednocześnie komplementarna i dystrybutywna, aby problem ten zniknął.

Stwierdzenie 6. *Niech* $(K, \leq)$ *będzie kratą dystrybutywną i komplementarną. Wówczas każdy element tej kraty ma dokładnie jedno dopełnienie.*

Dowód. Przypuśćmy, że $x \wedge y' = \bot$, $x \wedge y'' = \bot$ oraz $x \vee y' = \top$, $x \vee y'' = \top$. Wówczas

$$y' = y' \vee \bot = y' \vee (x \wedge y'') = (y' \vee x) \wedge (y' \vee y'') = \top \wedge (y' \vee y'') = y' \vee y''.$$

Zatem $y' = y' \vee y'' \Leftrightarrow y' \wedge y'' = y''$, czyli $y'' \leq y'$. Ponadto

$$y'' = y'' \vee \bot = y'' \vee (x \wedge y') = (y'' \vee x) \wedge (y'' \vee y') = \top \wedge (y' \vee y'') = y' \vee y'',$$

zatem $y'' = y' \vee y'' \Leftrightarrow y' \wedge y'' = y'$, czyli $y' \leq y''$. Tym samym $y' = y''$. □

Twierdzenie 2. *Każda krata dystrybutywna i komplementarna spełnia aksjomaty algebry Boole'a, gdzie*

- $\cup$ *interpretujemy jako* $\vee$,
- $\cap$ *interpretujemy jako* $\wedge$,
- $-$ *interpretujemy jako operację tworzenia dopełnienia,*
- 0 *interpretujemy jako* $\bot$,
- 1 *interpretujemy jako* $\top$.

Dowód. Dowód jest w zasadzie trywialny – jedyna część, jaka wymaga komentarza to sprawdzenie drugiego aksjomatu, który jest spełniony bo

$$\inf\{x, \inf\{y, z\}\} = \inf\{\inf\{x, y\}, z\}.$$

□

Na zakończenie rozważań o związkach między algebrami Boole'a i kratami podamy jeszcze jedno twierdzenie opisujące wybrane własności algebr Boole'a:

Twierdzenie 3. *W dowolnej algebrze Boole'a spełnione są następujące związki:*

(1) $x \cap y = 0 \Leftrightarrow x \leq -y$, $x \cup y = 1 \Leftrightarrow -y \leq x$,
(2) $x \cap -y = 0 \Leftrightarrow x \leq y$, $x \cup -y = 1 \Leftrightarrow y \leq x$,
(3) $-(-x) = x$,
(4) $-(x \cap y) = -x \cup -y$, $-(x \cup y) = -x \cap -y$,
(5) $x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x$.

Dowód. Udowodnimy dla przykładu część (3) twierdzenia, resztę pozostawiając jako ćwiczenie. Mamy bowiem:

$$-(-x) = -(-x) \cap 1 = -(-x) \cap (x \cup -x) = (-(-x) \cap -x) \cup (-(-x) \cap x) = -(-x) \cap x$$

a więc $-(-x) \leq x$. Podobnie

$$x = x \cap 1 = x \cap (-(-x) \cup -x) = (x \cap -(-x)) \cup (x \cap -x) = x \cap -(-x),$$

a więc $x \leq -(-x)$. Tym samym $-(-x) = x$. □

2.3. **Grafy i drzewa.** **Grafem skierowanym** lub krótko **grafem** będziemy nazywać strukturę $G = (G_0, G_1, src, tgt)$, gdzie G_0 jest zbiorem **węzłów**, G_1 zbiorem **krawędzi**, a $src, tgt : G_1 \to G_0$ są funkcjami. Graf o skończonej liczbie węzłów i krawędzi nazywamy **grafem skończonym.** Zapis

$$x \xrightarrow{f} y$$

oznacza $f \in G_1$, $x = src(f)$, $y = tgt(f)$. **Podgrafem** G' grafu G nazywamy strukturę (G'_0, G'_1, src, tgt) taką, że

(1) $G'_0 \subset G_0$,
(2) $G'_1 \subset G_1$,
(3) $src_{G'}(f) = src_G(f) \in G'_0$ dla każdej krawędzi $f \in G'_1$,
(4) $tgt_{G'}(f) = tgt_G(f) \in G'_0$ dla każdej krawędzi $f \in G'_1$.

Podgrafy oznaczamy przez $G' \trianglelefteq G$. Graf nazywamy **grafem prostym** gdy funkcja $(src, tgt) : G_1 \to G_0 \times G_0$ dana wzorem

$$(src, tgt)(f) = (src(f), tgt(f))$$

jest injekcją. Oznacza to, że dwóch węzłów nie łączy "podwójna krawędź".

Ścieżką skończoną w grafie G o długości n od $x \in G_0$ do $y \in G_0$ nazywamy ciąg krawędzi

$$x = x_0 \xrightarrow{f_1} x_2 \xrightarrow{f_2} x_3 \to \ldots \xrightarrow{f_n} x_n = y$$

Dwa węzły są **połączone,** jeśli istnieje w grafie G ścieżka skończona od x do y lub od y do x. Graf, w którym każde dwa węzły są połączone nazywamy **grafem spójnym.** Ścieżkę, która zaczyna się i kończy w tym samym węźle nazywamy **cyklem**. Jeżeli żadna ścieżka nie jest cyklem, to mówimy o grafie **acyklicznym.** Dla wybranego węzła $x \in G_0$ oznaczamy:

$$x^+ = \{b \in G_0 | \text{ istnieje krawędź } x \xrightarrow{f} b\},$$

$$x^- = \{a \in G_0 | \text{ istnieje krawędź } a \xrightarrow{f} x\},$$

Drzewem nazywamy graf prosty, spójny i acykliczny oraz taki, że

(1) istnieje dokładnie jeden węzeł k taki, że $k^- = \emptyset$, zwany **korzeniem**,
(2) $|x^-| = 1$ dla każdego węzła innego od k.

Podgraf drzewa nazywamy **poddrzewem.** Zbiór wszystkich poddrzew drzewa D oznaczamy przez $\mathrm{sub}(D)$. Zbiór wszystkich ścieżek od korzenia oznaczamy przez $\mathrm{adr}(D)$. Zauważmy, że zbiory $\mathrm{sub}(D)$ i $\mathrm{adr}(D)$ można utożsamiać; poddrzewo odpowiadające ścieżce s oznaczać będziemy przez D/s. Węzły dla których $x^+ = \emptyset$ nazywać będziemy **liściami**.

Tradycyjnie przez $[]$ oznaczać będziemy drzewo puste, przez $[x]$ drzewo złożone tylko z jednego węzła x oraz przez $[x|T_1; \ldots; T_n]$ drzewo z korzeniem x i poddrzewami $T_1, \ldots, T_n$. Ponadto przez Trees_ω oznaczamy klasę wszystkich drzew przeliczalnych. W tych oznanczeniach przyjmujemy definicję **wysokości** drzewa jako funkcji $h : \mathrm{Trees}_\omega \to \mathbb{N}$ określonej rekurencyjnie jako

$$h(T) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } T = [], \\ 1, & \text{gdy } T = [x], \\ 1 + \max\{h(T_i) : 1 < i < n\}, & \text{gdy } T = [x|T_1; \ldots; T_n]. \end{cases}$$

Zdefiniujmy jeszcze **zbiór okurencji** drzewa T' w T jako zbiór ścieżek

$$\omega(T', T) = \{s \in \mathrm{adr}(T) | T' = T/s\}.$$