

Logika intuicjonistyczna

- ▶ Logika klasyczna oparta jest na pojęciu wartości logicznej zdania. Poprawnie zbudowane i jednoznaczne stwierdzenie jest w tej logice klasyfikowane jako "prawdziwe" lub "fałszywe". Wartość logiczna zdania złożonego (np. implikacji) jest zaś ustalana na podstawie wartości jego składowych (niezależnie od ich faktycznej treści). Przypomnijmy na przykład, że klasyczna materialna implikacja nie zawsze odpowiada jakiegokolwiek faktycznej zależności pomiędzy przesłanką i konkluzją: zdanie

jeżeli asfalt jest czarny, to żaby kumkają
jest logicznie poprawne.

- ▶ Inną konsekwencją dwuwartościowości logiki klasycznej jest prawo wyłączonego środka. Akceptujemy alternatywę $p \vee \neg p$, niezależnie od tego czy zdanie p jest faktycznie prawdziwe czy fałszywe, a nawet nie wiedząc, co dokładnie to zdanie wyraża.

Zilustrujmy to na przykładzie:

Stwierdzenie

Istnieją takie liczby niewymierne x i y , że x^y jest liczbą wymierną.

Dowód.

Jeśli $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ jest wymierne, to można przyjąć $x = y = \sqrt{2}$, w przeciwnym przypadku niech $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ i $y = \sqrt{2}$. □

Powyższy dowód, przy całej swojej prostocie i elegancji, ma pewną oczywistą wadę: nadal nie wiemy, jakie liczby naprawdę spełniają żądany warunek. A oto inny dowód tego samego stwierdzenia:

Dowód.

Dla $x = \sqrt{2}$ oraz $y = 2\log_2 3$ mamy $x^y = 3$.



- ▶ Mówimy, że drugi dowód, w odróżnieniu od pierwszego, jest **konstruktywny**. Oczywiście, konstruktywny dowód zawiera w sobie więcej przydatnej informacji niż niekonstruktywny, ale z punktu widzenia logiki klasycznej, oba te dowody są tak samo poprawne.
- ▶ Logika dopuszczająca tylko wnioskowania o charakterze konstruktywnym, znana jest pod tradycyjną, nieco mylącą, nazwą **logiki intuicjonistycznej**.
- ▶ W tej logice nie przypisujemy zdaniom wartości logicznych.
- ▶ Nieformalne objaśnienie zasad logiki intuicjonistycznej posługuje się pojęciem **konstrukcji**.

Zdanie jest uważane za prawdziwe, gdy można podać jego konstrukcję, tworzoną według następujących zasad (od nazwisk Brouwera, Heytinga i Kołmogorowa zwanych interpretacją BHK):

- ▶ Konstrukcja dla $\phi \wedge \psi$ polega na podaniu konstrukcji dla ϕ i konstrukcji dla ψ .
- ▶ Konstrukcja dla $\phi \vee \psi$ polega na wskazaniu jednego ze składników ϕ, ψ i podaniu konstrukcji dla tego składnika.
- ▶ Konstrukcja dla implikacji $\phi \rightarrow \psi$ to metoda (funkcja) przekształcająca każdą konstrukcję przesłanki ϕ w konstrukcję dla konkluzji ψ .
- ▶ Nie ma konstrukcji dla fałszu $\perp$.
- ▶ Konstrukcja dla $\forall x\phi(x)$ to metoda, która każdej potencjalnej wartości a zmiennej x przypisuje konstrukcję dla $\phi(a)$.
- ▶ Konstrukcja dla $\exists x\phi(x)$ polega na wskazaniu pewnej wartości a zmiennej x , oraz konstrukcji dla $\phi(a)$.
- ▶ Negacja intuicjonistyczna $\neg\phi$ utożsamiana jest z implikacją $\phi \rightarrow \perp$. A zatem konstrukcja dla $\neg\phi$ to metoda obracająca każdą ewentualną konstrukcję ϕ w absurd ("rzecz, której nie ma").

Nie od rzeczy jest tu następująca uwaga: o konstrukcji dla $\phi \rightarrow \psi$ można myśleć jak o funkcji **typu** $\phi \rightarrow \psi$, bo przecież konstrukcjom dla ϕ (obiektom "typu ϕ ") przypisuje ona konstrukcje dla ψ , czyli obiekty "typu ψ ". Wrócimy jeszcze do tej analogii.

Przykład:

1. Konstrukcję dla formuły $p \rightarrow \neg\neg p$ możemy zapisać tak:
Przypuśćmy, że dana jest konstrukcja C dla przesłanki p .
Wtedy konstrukcja dla konkluzji $\neg\neg p$ (czyli dla $(p \rightarrow \perp) \rightarrow \perp$)
jest następująca: daną konstrukcję dla formuły $p \rightarrow \neg$ należy
zastosować do C .

- ▶ Próba podania konstrukcji dla implikacji odwrotnej $\neg\neg p \rightarrow p$ natrafia jednak na nieprzezwyciężalną trudność.
- ▶ Aby wykorzystać daną konstrukcję dla $(p \rightarrow \perp) \rightarrow \perp$, musielibyśmy mieć konstrukcję dla $p \rightarrow \perp$, a skoro jej nie mamy, to założenie jest bezużyteczne.
- ▶ Niemożliwe jest też wskazanie konstrukcji dla schematu $p \vee \neg p$, nie znając p nie możemy bowiem wskazać żadnego z członów alternatywy.
- ▶ Podobnie będzie na przykład z implikacją $\forall x(q \vee p(x)) \rightarrow q \vee \forall x p(x)$. Konstrukcja przesłanki dla każdej wartości a zmiennej x generuje albo konstrukcję dla q albo konstrukcję dla $p(a)$. Ale skorzystać z niej można tylko dla konkretnych wartości a . Tymczasem, aby podać konstrukcję dla konkluzji, musielibyśmy umieć podjąć krytyczną decyzję "w ciemno".

- ▶ Objaśnienia odwołujące się do pojęcia konstrukcji są tylko nieformalne.
- ▶ Ścisłą definicję logiki intuicjonistycznej może stanowić system wnioskowania, na przykład w stylu naturalnej dedukcji.
- ▶ Dla uproszczenia ograniczymy się dzisiaj do intuicjonistycznego rachunku zdań. System naturalnej dedukcji dla takiego rachunku, przedstawiony poniżej można uważać za uściślenie interpretacji BHK. Otrzymujemy go z systemu klasycznego przez odrzucenie reguły (PS).
- ▶ Robimy to, zauważając z pewną satysfakcją, że właśnie ta reguła "nie pasuje" do pozostałych, bo odbiega swoją formą od zasady wprowadzania i eliminacji spójników.

Reguły dowodzenia:

$$\rightarrow\text{-intro} \quad \frac{\Delta, \phi \vdash \psi}{\Delta \vdash \phi \rightarrow \psi}$$

$$\rightarrow\text{-elim} \quad \frac{\Delta \vdash \phi \rightarrow \psi, \Delta \vdash \phi}{\Delta \vdash \psi}$$

$$\wedge\text{-intro} \quad \frac{\Delta \vdash \phi, \Delta \vdash \psi}{\Delta \vdash \phi \wedge \psi}$$

$$\wedge\text{-elim} \quad \frac{\Delta \vdash \phi \wedge \psi}{\Delta \vdash \phi}$$

$$\wedge\text{-elim} \quad \frac{\Delta \vdash \phi \wedge \psi}{\Delta \vdash \psi}$$

$$\vee\text{-intro} \quad \frac{\Delta \vdash \phi}{\Delta \vdash \phi \vee \psi}$$

$$\vee\text{-intro} \quad \frac{\Delta \vdash \psi}{\Delta \vdash \phi \vee \psi}$$

$$\vee\text{-elim} \quad \frac{\Delta \vdash \phi \vee \psi, \Delta, \phi \vdash \zeta, \Delta, \psi \vdash \zeta}{\Delta \vdash \zeta}$$

- ▶ Ciekawy jest sposób w jaki z klasycznego rachunku sekwentów można otrzymać system dla logiki intuicjonistycznej.
- ▶ Otóż należy w tym celu ograniczyć liczbę formuł występujących po prawej stronie sekwentów do (co najwyżej) jednej, przy czym sekwent $\Gamma \vdash$ z pustą prawą stroną można utożsamiać z sekwentem $\Gamma \vdash \perp$.
- ▶ Reguła ($\vee$ -prawa) traci wtedy sens i trzeba ją zastąpić przez dwie inne reguły.
- ▶ Pozostałe reguły pozostają w zasadzie bez zmian.

Reguły dowodzenia:

$$\rightarrow\text{-lewa} \quad \frac{\Delta \vdash \phi; \Delta, \psi \vdash \zeta}{\Delta, \phi \rightarrow \psi \vdash \zeta}$$

$$\rightarrow\text{-prawa} \quad \frac{\Delta, \phi \vdash \psi}{\Delta \vdash \Gamma, \phi \rightarrow \psi}$$

$$\wedge\text{-lewa} \quad \frac{\Delta, \phi, \psi \vdash \zeta}{\Delta, \phi \wedge \psi \vdash \zeta}$$

$$\wedge\text{-lewa} \quad \frac{\Delta \vdash \phi; \Delta \vdash \psi}{\Delta \vdash \phi \wedge \psi}$$

$$\vee\text{-lewa} \quad \frac{\Delta, \phi \vdash \zeta; \Delta, \psi \vdash \zeta}{\Delta, \phi \vee \psi \vdash \zeta}$$

$$\vee\text{-prawa} \quad \frac{\Delta \vdash \psi}{\Delta \vdash \phi \vee \psi}$$

- Intuicjonistyczny system dowodzenia w stylu Hilberta dla logiki zdaniowej, w której występuje tylko implikacja i fałsz, a negacja $\neg\phi$ jest zdefiniowana jako $\phi \rightarrow \perp$, otrzymamy bardzo łatwo: wystarczy usunąć aksjomat $\neg\neg\phi \rightarrow \phi$ z systemu klasycznego i dodać jeden nowy:

$$(A3i) \quad \perp \rightarrow \phi.$$

Z aksjomatów klasycznego rachunku zdań w ujęciu hilbertowskim przyjmujemy następujące w duchu BHK:

1. $A \wedge B \rightarrow A$,
2. $A \wedge B \rightarrow B$,
3. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C)))$,
4. $A \rightarrow A \vee B$,
5. $B \rightarrow A \vee B$,
6. $(B \rightarrow A) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow (B \vee C \rightarrow A))$.

Stwierdzenie

Opisane powyżej intuicjonistyczne systemy dowodzenia (naturalna dedukcja, rachunek sekwentów oraz system Hilberta) są sobie równoważne: formuła ϕ jest twierdzeniem dowolnego z tych systemów wtedy i tylko wtedy, gdy jest twierdzeniem każdego z pozostałych.

- ▶ Wróćmy teraz do systemu naturalnej dedukcji dla intuicjonistycznego rachunku zdań.
- ▶ Dla uproszczenia ograniczmy się na razie do tzw. minimalnej logiki implikacyjnej, tj. do formuł zbudowanych z pomocą samej implikacji.

- ▶ Przypuśćmy, że mamy taki dowód:

$$\begin{array}{c}
 (2) \\
 \vdots \\
 (1) \quad \vdots \quad \frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi} \quad (\rightarrow I) \\
 \hline
 \Gamma \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi \quad (\rightarrow E) \\
 \hline
 \Gamma \vdash \psi
 \end{array}$$

- ▶ W tym dowodzie najpierw wprowadzamy implikację, a zaraz potem ją eliminujemy.
- ▶ Można jednak zrobić inaczej. Tam gdzie w części (2) dowodu używane jest założenie ϕ można po prostu wstawić całą część (1).
- ▶ Chociaż rozmiary nowego dowodu mogą być większe (założenie ϕ mogło być używane kilkakrotnie) to jednak jego struktura będzie prostsza. Docelowo możemy uzyskać dowód, w którym takie sytuacje jak na rysunku w ogóle nie występują.

- ▶ Taki dowód nazwiemy **dowodem normalnym**. Proces normalizacji dowodu jest podobny do procesu eliminacji cięcia, a dowody normalne mają podobne zalety jak dowody bez cięcia.
- ▶ W szczególności, wyszukiwanie dowodu dla danej formuły staje się łatwiejsze, jeśli można się ograniczyć do dowodów normalnych.