

Paradygmaty dowodzenia

- ▶ Sprawdzenie, czy dana formuła rachunku zdań jest tautologią polega zwykle na obliczeniu jej wartości dla 2^n różnych wartościowań, gdzie n jest liczbą zmiennych zdaniowych tej formuły. Jak dotąd nie są znane radykalnie szybsze metody.
- ▶ Dla rachunku predykatów nie istnieje w ogóle żaden algorytm sprawdzania czy dana formuła jest tautologią, o czym przekonaliśmy się na ostatnim wykładzie.
- ▶ W obu przypadkach istnieją jednak metody dowodzenia pozwalające na wyprowadzanie prawdziwych formuł za pomocą ustalonych procedur syntaktycznych w ramach pewnego systemu dowodzenia.
- ▶ Poznane przez nas dotychczas syntaktyczne podejście do dowodzenia twierdzeń klasycznego rachunku zdań zwane bywa **systemem hilbertowskim**.
- ▶ Poznamy obecnie dwa dalsze systemu tego typu, a mianowicie system **naturalnej dedukcji** i system **rachunku sekwentów**.

- ▶ System naturalnej dedukcji (wprowadzony przez S. Jaśkowskiego i G. Gentzena) operuje wyrażeniami zwanymi sekwentami.
- ▶ Sekwenty są to wyrażenia postaci $\Delta \vdash \phi$, gdzie Δ jest pewnym skończonym zbiorem formuł, a ϕ jest formułą.
- ▶ W odróżnieniu od systemu hilbertowskiego, w naturalnej dedukcji istotne są reguły dowodzenia, a aksjomat jest prosty.
- ▶ Charakterystyczną cechą naturalnej dedukcji jest to, że reguły dowodzenia (za wyjątkiem reguły (PS) "przez sprzeczność") są podzielone na grupy, po jednej dla każdego spójnika. W ramach jednej takiej grupy mamy dwa rodzaje reguł.
- ▶ Reguły wprowadzania mówią o tym w jakiej sytuacji można wprowadzić dany spójnik na prawo od znaku $\vdash$ (tj. wywnioskować formułę danego kształtu).
- ▶ Reguły eliminacji mówią o tym w jakiej sytuacji można ten spójnik wyeliminować, tzn. jak można użyć formuły zbudowanej z jego pomocą do wyprowadzenia innej formuły.
- ▶ Regułę dowodzenia "przez sprzeczność" można traktować jako "silną" regułę eliminacji $\perp$. $\neg\phi$ oznacza formułę $\phi \rightarrow \perp$.

Poniżej będziemy stosować następującą konwencję:

Napis $\Delta, \phi_1, \dots, \phi_n$ oznacza zbiór $\Delta \cup \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$, przy czym nie zakładamy tu, że $\phi_i \notin \Delta$.

Aksjomat:

$$(A0) \quad \Delta, \phi \vdash \phi$$

Reguły dowodzenia:

$$\rightarrow\text{-intro} \quad \frac{\Delta, \phi \vdash \psi}{\Delta \vdash \phi \rightarrow \psi}$$

$$\rightarrow\text{-elim} \quad \frac{\Delta \vdash \phi \rightarrow \psi, \Delta \vdash \phi}{\Delta \vdash \psi}$$

$$\wedge\text{-intro} \quad \frac{\Delta \vdash \phi, \Delta \vdash \psi}{\Delta \vdash \phi \wedge \psi}$$

$$\wedge\text{-elim} \quad \frac{\Delta \vdash \phi \wedge \psi}{\Delta \vdash \phi}$$

$$\wedge\text{-elim} \quad \frac{\Delta \vdash \phi \wedge \psi}{\Delta \vdash \psi}$$

$$\vee\text{-intro} \quad \frac{\Delta \vdash \phi}{\Delta \vdash \phi \vee \psi}$$

$$\vee\text{-intro} \quad \frac{\Delta \vdash \psi}{\Delta \vdash \phi \vee \psi}$$

$$\vee\text{-elim} \quad \frac{\Delta \vdash \phi \vee \psi, \Delta, \phi \vdash \zeta, \Delta, \psi \vdash \zeta}{\Delta \vdash \zeta}$$

$$(\text{PS}) \quad \frac{\Delta, \neg \phi \vdash \perp}{\Delta \vdash \phi}$$

Zauważmy, że szczególnym przypadkiem reguły ($\rightarrow$ -intro) jest następująca reguła, można ją traktować jak regułę wprowadzenia negacji:

$$\frac{\Delta, \phi \vdash \perp}{\Delta \vdash \neg \phi}$$

Zauważmy też, że szczególnym przypadkiem reguły ($\rightarrow$ -elim) jest następująca reguła, można ją traktować jak regułę eliminacji negacji:

$$\frac{\Delta \vdash \neg\phi, \Delta \vdash \phi}{\Delta \vdash \perp}$$

- ▶ O ile dowody w systemie hilbertowskim definiowaliśmy zarówno jako ciągi jak i drzewa, ale na ogół traktowali jak ciągi, o tyle w systemie naturalnej dedukcji dowody są drzewami. Pozwala to znacznie lepiej wizualizować zależności pomiędzy przesłankami i konkluzją stosowanych reguł.
- ▶ Dowodem sekwentu $\Delta \vdash \phi$ w systemie naturalnej dedukcji nazwiemy drzewo etykietowane sekwentami tak, że korzeń ma etykietę $\Delta \vdash \phi$, liście są etykietowane wystąpieniami aksjomatu oraz każdy wewnętrzny wierzchołek jest etykietowany sekwentem otrzymanym z etykiet potomków tego wierzchołka przy zastosowaniu jednej z reguł.
- ▶ Piszemy $\Delta \vdash_N \phi$, gdy sekwent $\Delta \vdash \phi$ ma dowód w systemie naturalnej dedukcji.
- ▶ Gdy $\Delta = \emptyset$ to mówimy też, że ϕ jest **twierdzeniem** systemu naturalnej dedukcji i zapisujemy to przez $\vdash_N \phi$.
- ▶ Jeśli Δ jest zbiorem nieskończonym, to $\Delta \vdash_N \phi$ oznacza, że istnieje dowód sekwentu $\Delta_0 \vdash \phi$, dla pewnego skończonego $\Delta_0 \subset \Delta$.

Przykłady:

1. Pokażemy, że $\vdash_N p \rightarrow p$:

$$\frac{p \vdash p}{\vdash p \rightarrow p} (\rightarrow\text{-intro})$$

2. Pokażemy, że $\vdash_N p \rightarrow (q \rightarrow p)$:

$$\frac{p, q \vdash p}{p \vdash q \rightarrow p} (\rightarrow\text{-intro})$$

$$\frac{p \vdash q \rightarrow p}{\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)} (\rightarrow\text{-intro})$$

3. Pokażemy, że $\vdash_N \neg\neg p \rightarrow p$:

$$\frac{\neg\neg p, \neg p \vdash \neg\neg p, \neg\neg p, \neg p \vdash \neg p}{\neg\neg p, \neg p \vdash p} (\rightarrow\text{-elim})$$

$$\frac{\neg\neg p, \neg p \vdash p}{\neg\neg p \vdash p} (\text{PS})$$

$$\frac{\neg\neg p \vdash p}{\vdash \neg\neg p \rightarrow \neg p} (\rightarrow\text{-intro})$$

Oznaczmy przez $\Delta \vdash_H \phi$ to, że formuła ϕ ma dowód na gruncie zbioru formuł Δ w rachunku hilbertowskim.

Twierdzenie

Dla dowolnego sekwentu $\Delta \vdash \phi$:

$$\Delta \vdash_N \phi \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \Delta \vdash_H \phi$$

Dowód:

- ▶ Dla dowodu tego, że każdy dowód w systemie naturalnej dedukcji daje się przerobić na dowód w rachunku hilbertowskim wystarczy sprawdzić, że każda z reguł w systemie naturalnej dedukcji jest wyprowadzalna w systemie hilbertowskim – ale wynika to wprost z lematów udowodnionych na Wykładzie 4.
- ▶ Na odwrót, dla pokazania implikacji przeciwnej należy pokazać, że wszystkie aksjomaty KRZ są twierdzeniami systemu naturalnej dedukcji. Kilka z nich udowodniliśmy już w powyższych przykładach, dowody pozostałych pozostawiamy Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

- ▶ Dla przedstawienia rachunku sekwentów rozszerzymy nieco pojęcie sekwentu. Przez **sekwent** będziemy teraz rozumieć napis $\Delta \vdash \Gamma$, gdzie Δ oraz Γ są skończonymi zbiorami formuł.
- ▶ Intuicyjnie, wyprowadzalność sekwentu $\Delta \vdash \Gamma$ w rachunku sekwentów będzie oznaczać, że alternatywa formuł z Γ wynika z hipotez Δ .
- ▶ Podobnie jak w poprzedniej części, rozważamy formuły, zbudowane w oparciu o spójniki $\rightarrow, \vee, \wedge$ oraz stałą zdaniową $\perp$. Negację $\neg$ traktujemy jako spójnik zdefiniowany przez $\rightarrow$ i $\vdash$.
- ▶ Charakterystyczną cechą rachunku sekwentów jest specyficzna postać reguł. Reguły w tym systemie naturalnie dzielą się na dwie grupy: jedna grupa reguł opisuje sytuacje kiedy możemy wprowadzić dany spójnik na lewo od znaku $\vdash$, a druga grupa jest odpowiedzialna za wprowadzanie spójnika na prawo od $\vdash$. Dla każdego spójnika mamy odpowiadającą parę reguł.
- ▶ Aksjomat ($A\perp$) można traktować jako regułę (bez przesłanek) wprowadzenia $\perp$ z lewej strony znaku $\vdash$.

Aksjomaty:

(A00) $\Delta, \phi \vdash \Gamma, \phi$

(A $\perp$) $\Delta, \perp \vdash \Gamma$

Reguły dowodzenia:

$$\rightarrow\text{-lewa} \quad \frac{\Delta \vdash \Gamma, \phi; \Delta, \psi \vdash \Gamma}{\Delta, \phi \rightarrow \psi \vdash \Gamma}$$

$$\rightarrow\text{-prawa} \quad \frac{\Delta, \phi \vdash \Gamma, \psi}{\Delta \vdash \Gamma, \phi \rightarrow \psi}$$

$$\wedge\text{-lewa} \quad \frac{\Delta, \phi, \psi \vdash \Gamma}{\Delta, \phi \wedge \psi \vdash \Gamma}$$

$$\wedge\text{-lewa} \quad \frac{\Delta \vdash \Gamma, \phi; \Delta \vdash \Gamma, \psi}{\Delta \vdash \Gamma, \phi \wedge \psi}$$

$$\vee\text{-lewa} \quad \frac{\Delta, \phi \vdash \Gamma; \Delta, \psi \vdash \Gamma}{\Delta, \phi \vee \psi \vdash \Gamma}$$

$$\vee\text{-prawa} \quad \frac{\Delta \vdash \Gamma, \phi, \psi}{\Delta \vdash \Gamma, \phi \vee \psi}$$

- ▶ Dowodem sekwentu $\Delta \vdash \Gamma$, tak jak poprzednio, nazywamy drzewko etykietowane sekwentami tak, że korzeń jest etykietowany przez $\Delta \vdash \Gamma$, liście są etykietowane aksjomatami oraz wierzchołki wewnętrzne są etykietowane sekwentami otrzymanymi poprawnie przez zastosowanie reguł dowodzenia.
- ▶ Jeśli istnieje dowód sekwentu $\Delta \vdash \Gamma$ w rachunku sekwentów to zapisujemy to przez $\Delta \vdash_G \Gamma$. (Litera G pochodzi od nazwiska twórcy tego systemu, G. Gentzena.)
- ▶ Piszemy też $\Delta \vdash_G \phi$, gdy Δ jest nieskończony, ale $\Delta_0 \vdash_G \phi$ dla pewnego skończonego $\Delta_0 \subset \Delta$.

- Zauważmy, że jeśli mamy sekwent $\Delta \vdash \Gamma, \phi$ to stosując aksjomat $(A\perp)$, a następnie $(\rightarrow\text{-lewa})$ dostajemy sekwent $\Delta, \neg\phi \vdash \Gamma$. Zatem natępująca reguła jest wyprowadzalna w systemie $\vdash_G$:

$$(\neg\text{-lewa}) \frac{\Delta \vdash \Gamma, \phi}{\Delta, \neg\phi \vdash \Gamma}$$

- Ponadto zauważmy, że jeśli mamy dowód sekwentu $\Delta \vdash \Gamma$, to dla każdej formuły ϕ możemy ją dodać do prawej strony każdego sekwentu w tym dowodzie i otrzymamy dowód sekwentu $\Delta \vdash \Gamma, \phi$.

Łatwy dowód indukcyjny pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie.

W szczególności, jeśli mamy udowodniony sekwent $\Delta, \phi \vdash \Gamma$, to możemy też udowodnić sekwent $\Delta, \phi \vdash \Gamma, \perp$.

Stosując do niego regułę ($\rightarrow$ -prawa) otrzymujemy sekwent $\Delta \vdash \Gamma, \neg\phi$.

Tym samym pokazaliśmy, że następująca reguła jest dopuszczalna w systemie $\vdash_G$:

$$(\neg\text{-prawa}) \frac{\Delta, \phi \vdash \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma, \neg\phi}$$

Twierdzenie

Dla dowolnego sekwentu $\Delta \vdash \phi$:

$\Delta \vdash_G \phi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta \vdash_H \phi$

- ▶ Powyższe twierdzenie pozostawimy bez dowodu.
- ▶ Łatwo jest "przetłumaczyć" każde wyprowadzenie w systemie $\vdash_G$ na dowód w stylu Hilberta.
- ▶ Dla dowodu implikacji odwrotnej rozszerza się system $\vdash_G$ przez dodanie nowej reguły zwanej cięciem:

$$(\text{cięcie}) \frac{\Delta, \phi \vdash \Gamma; \Delta \vdash \phi, \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma}$$

- ▶ Niech $\vdash_{GC}$ oznacza system gentzenowski z cięciem. Bez trudu można pokazać, że reguła odrywania jest wyprowadzalna w $\vdash_{GC}$. Zatem, korzystając z twierdzenia o pełności pokazujemy, że każda tautologia jest twierdzeniem systemu $\vdash_{GC}$.
- ▶ Główna trudność w dowodzie polega na udowodnieniu następującego twierdzenia o eliminacji cięcia:

Twierdzenie

Jeśli $\Delta \vdash_{GC} \Gamma$, to $\Delta \vdash_G \Gamma$.

- ▶ Główna zaleta dowodów w rachunku sekwentów wynika z następującej własności podformuł: wszystkie formuły występujące w przesłance dowolnej reguły są podformułami formuł występujących w konkluzji. Zatem np. w dowodzie sekwentu $\vdash \phi$ mamy do czynienia tylko z podformułami formuły ϕ .
- ▶ Dla danej formuły ϕ , łatwiej więc znaleźć dowód w sensie Gentzena niż np. dowód w sensie Hilberta. Dlatego systemy zbliżone do rachunku sekwentów znajdują zastosowanie w automatycznym dowodzeniu twierdzeń.

Przykład:

4. Poszukamy dowodu sekwentu $\vdash \neg\neg\phi \rightarrow \phi$ w $\vdash_G$.

Ponieważ najbardziej zewnętrznym spójnikiem w rozważanej formule jest $\rightarrow$, to ostatnią regułą w poszukiwanym dowodzie musiała być reguła ($\rightarrow$ -prawa).

Zatem wystarczy znaleźć dowód sekwentu $\neg\neg\phi \vdash \phi$.

Najbardziej zewnętrznym spójnikiem formuły po lewej stronie jest $\neg$, a zatem na mocy reguły ($\neg$ -lewa) wystarczy udowodnić sekwent $\vdash \phi, \neg\phi$.

Podobnie, na mocy reguły ($\neg$ -prawa), wystarczy udowodnić sekwent $\phi \vdash \phi$, a on przecież jest aksjomatem.