

Definicja:

Alfabet języka logiki zdań składa się z nieskończonego (najczęściej zakładamy: przeliczalnego) zbioru P , o którym myślimy jak o zbiorze **zmiennych zdaniowych** i skończonego zbioru symboli, o których myślimy jak o **spójnikach zdaniowych**:

- ▶ $\neg$ – jednoargumentowy, negacja;
- ▶ $\wedge$ – dwuargumentowy, koniunkcja;
- ▶ $\vee$ – dwuargumentowy, alternatywa;
- ▶ $\rightarrow$ – dwuargumentowy, implikacja.

Dodatkowo “dorzucamy” też do naszego alfabetu nawiasy (i).

Język logiki zdań L definiujemy teraz jako najmniejszy podzbiór monoidu L^* spełniający warunki:

1. $P \subset L$;
2. jeśli $A, B \in L$, to do L należą również następujące formuły:

$$\neg A, \quad A \wedge B, \quad A \vee B, \quad A \rightarrow B.$$

Niech $A, B, C, \dots$ oznaczają formuły. Przyjmujemy następujące aksjomaty:

1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ (prawo poprzedzania),
2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ (sylogizm Fregego),
3. $A \wedge B \rightarrow A$,
4. $A \wedge B \rightarrow B$,
5. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C)))$,
6. $A \rightarrow A \vee B$,
7. $B \rightarrow A \vee B$,
8. $(B \rightarrow A) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow (B \vee C \rightarrow A))$,
9. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ (prawo Dunsza Szkota),
10. $(A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$ (prawo redukcji do absurdu),
11. $\neg\neg A \rightarrow A$ (mocne prawo podwójnego przeczenia);

oraz następującą regułę, zwaną **regułą odrywania**:

$$\frac{A \rightarrow B, A}{B} r_0.$$

Twierdzenie o dedukcji [Herbrand, 1930]

Niech $\Gamma \subset L$, $A, B \in L$. Wówczas

$\Gamma \vdash A \rightarrow B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Gamma, A \vdash B$

Twierdzenie o ekstensjonalności:

Niech A^* będzie formułą, która powstaje z formuły A przez zastąpienie pewnych wystąpień formuły D formułą D' . Przy tych oznaczeniach reguła **ekstensjonalności**:

$$\frac{D \leftrightarrow D'}{A \leftrightarrow A^*}$$

jest wyprowadzalna w KRZ.

Niech L będzie językiem logiki zdań. Na zbiorze L definiujemy następujące operacje:

- ▶ $Neg(A) = \neg A$,
- ▶ $Alt(A, B) = A \vee B$,
- ▶ $Kon(A, B) = A \wedge B$,
- ▶ $Imp(A, B) = A \rightarrow B$.

Algebrę $\mathbf{L} = (L, Neg, Alt, Kon, Imp)$ nazywamy **algebrą języka logiki zdań**. Jest to algebra o typie $\tau_{\mathbf{L}} = (1, 2, 2, 2)$. Algebra $\mathbf{L}$ jest algebrą absolutnie wolną ze zbiorem zmiennych zdaniowych P jako zbiorem wolnych generatorów.

Matrycą (Łukasiewicz, Tarski, 1930) dla języka logiki zdaniowej nazywamy parę

$$\mathcal{M} = (\mathbf{M}, M^*),$$

gdzie $\mathbf{M}$ jest algebrą podobną do algebry języka logiki zdań, zaś zbiór $\emptyset \neq M^* \subset M$ nazywamy zbiorem elementów wyróżnionych matrycy (zakładamy często, że M^* jest jednoelementowy).

Piszemy też

$$\mathcal{M} = (M, M^*, F_{\neg}, F_{\wedge}, F_{\vee}, F_{\rightarrow}).$$

Niech $\mathcal{M}$ będzie pewną matrycą dla języka logiki zdań.

Wartościowaniem w $\mathcal{M}$ nazywamy dowolne odwzorowanie $\varphi : P \rightarrow M$. Każde takie odwzorowanie przedłuża się jednoznacznie do homomorfizmu algebry **L** w algebrę **M**. Homomorfizm ten będziemy również oznaczać przez φ .

Niech A będzie dowolną formułą języka zdań i niech $\mathcal{M}$ będzie matrycą. Ustalmy wartościowanie $\varphi : P \rightarrow M$. Mówimy, że φ **spełnia** A w $\mathcal{M}$, gdy $\varphi(A) \in M^*$. Formułę A nazwiemy **tautologią matrycy** $\mathcal{M}$, gdy A jest spełniona w $\mathcal{M}$ przy każdym wartościowaniu (mówimy wtedy też, że A jest **prawdziwe** w $\mathcal{M}$). Zbiór wszystkich tautologii matrycy $\mathcal{M}$ nazywamy **zawartością** tej matrycy i oznaczamy przez $E(\mathcal{M})$. Mówimy, że A **wynika logicznie** z B w matrycy $\mathcal{M}$, jeżeli dla każdego wartościowania $\varphi : P \rightarrow M$

$$\text{jeżeli } \varphi(A) \in M^*, \text{ to } \varphi(B) \in M^*.$$

Mówimy, że A i B są **logicznie równoważne** w matrycy $\mathcal{M}$, gdy dla każdego wartościowania $\varphi : P \rightarrow M$

$$\varphi(A) = \varphi(B).$$

Dowolną funkcję $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ nazywamy **funkcją booleowską**.

Każda formuła języka logiki zdań wyznacza pewną funkcję booleowską f_A taką, że dla dowolnego $\phi : P \rightarrow \{0, 1\}$:

$$\phi(A) = f_A(\phi(p_1), \dots, \phi(p_m)),$$

o ile $A = A(p_1, \dots, p_m)$.

Okazuje się, że twierdzenie odwrotne też jest prawdziwe.

Twierdzenie

Każda funkcją booleowska jest wyznaczona przez pewną formułę języka logiki zdań, przy czym w formule tej występują tylko spójniki $\neg, \vee, \wedge$.

Zbiór formuł Σ jest **spełnialny**, gdy istnieje wartościowanie ϕ takie, że dla każdego $A \in \Sigma$ mamy $\phi(A) = 1$. Mówimy, że Σ jest **skończenie spełnialny**, gdy każdy skończony podzbiór zbioru Σ jest spełnialny.

Twierdzenie (o zwartości)

Zbiór formuł Σ jest spełnialny wtedy i tylko wtedy, gdy Σ jest skończenie spełnialny.

Dowód: Oczywiście wystarczy pokazać, że jeśli zbiór jest skończenie spełnialny, to jest też spełnialny. Załóżmy więc, że Σ jest skończenie spełnialny. Niech V będzie zbiorem wszystkich zmiennych występujących w formułach zbioru Σ . Rozważmy $\{0, 1\}^V$ jako produkt przestrzeni dyskretnej $\{0, 1\}$. Wobec twierdzenia Tichonowa $\{0, 1\}^V$ jest przestrzenią zwartą. Zbiory

$$B_{p,i} = \{\phi \in \{0, 1\}^V : \phi(p) = i\}$$

stanowią podbazę przestrzeni $\{0, 1\}^V$. Ponadto $B_{p,i}$ są domknięto-otwarte, bo $\{0, 1\}^V \setminus B_{p,0} = B_{p,1}$.

Dla dowolnej formuły $A \in \Sigma$ niech

$$D(A) = \{\phi \in \{0, 1\}^V : \phi(A) = 1\}.$$

Z założenia wiemy, że każdy skończony podzbiór Σ_0 zbioru Σ jest spełnialny. Zatem

$$\bigcap \{D(A) : A \in \Sigma_0\} \neq \emptyset \text{ dla skończonego podzbioru } \Sigma_0 \subset \Sigma.$$

Zbiory $D(A)$ są zbiorami domknięto-otwartymi (jako skończone sumy skończonych przekrojów zbiorów podbazowych). Zatem

$$\bigcap \{D(A) : A \in \Sigma\} \neq \emptyset,$$

a zatem Σ jest spełnialny.

Stwierdzenie

Wszystkie aksjomaty KRZ są tautologiami w matrycy $\mathcal{M}_2$. Reguła odrywania jest regułą niezawodną w $\mathcal{M}_2$, czyli każda teza systemu klasycznego rachunku zdań jest tautologią matrycy $\mathcal{M}_2$.

Niech L będzie językiem KRZ. rozważmy relację $\sim \subset L^2$:

$A \sim B$ wtedy i tylko wtedy gdy $\vdash A \leftrightarrow B$.

Stwierdzenie

Relacja $\sim$ jest równoważnością

Dowód.

Wobec rezultatów udowodnionych na ostatnim wykładzie:

- ▶ zwrotność zachodzi, ponieważ mamy $\vdash A \leftrightarrow A$ wobec Lematu 1,
- ▶ symetria zachodzi, ponieważ mamy $\vdash A \leftrightarrow B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\vdash B \leftrightarrow A$ wobec definicji,
- ▶ przechodniość zachodzi, ponieważ mamy, że jeśli $\vdash A \leftrightarrow B$ oraz $\vdash B \leftrightarrow C$, to $\vdash A \leftrightarrow C$ wobec twierdzenia o ekstensjonalności.



Oznaczmy przez $L^\sim$ zbiór klas abstrakcji relacji $\sim$. Klasy abstrakcji oznaczać będziemy po prostu przez $[A]$. W zbiorze $L^\sim$ definiujemy relację

$$[A] \leq [B] \text{ wtedy i tylko wtedy gdy } \vdash A \rightarrow B.$$

Wobec twierdzenia o ekstensjonalności, relacja powyższa jest dobrze określona. Pokażemy jednak coś znacznie silniejszego.

Twierdzenie

$(L^\sim, \leq)$ jest dystrybutywną kratą komplementarną.

Dowód: Sprawdzenie, że $\leq$ jest relacją porządku, pozostawiamy czytelnikowi jako proste ćwiczenie.

Pokażemy, że $[A] \cap [B] = [A \wedge B]$. Istotnie, mamy:

$$\vdash A \wedge B \rightarrow A,$$

$$\vdash A \wedge B \rightarrow B.$$

Zatem $[A \wedge B] \leq [A]$ oraz $[A \wedge B] \leq [B]$. Niech $[C] \leq [A]$ oraz $[C] \leq [B]$. Wtedy $\vdash C \rightarrow A$ oraz $\vdash C \rightarrow B$. Ponadto

$$\vdash (C \rightarrow A) \rightarrow ((C \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow A \wedge B)).$$

Stąd $\vdash C \rightarrow A \wedge B$, co oznacza $[C] \leq [A \wedge B]$.

Pokażemy, że $[A] \cup [B] = [A \vee B]$. Istotnie, mamy:

$$\vdash A \rightarrow A \vee B,$$

$$\vdash B \rightarrow A \vee B.$$

Zatem $[A] \leq [A \vee B]$ oraz $[B] \leq [A \vee B]$. Niech teraz $[A] \leq [C]$ oraz $[B] \leq [C]$. Wtedy $\vdash A \rightarrow C$ oraz $\vdash B \rightarrow C$. Ponadto:

$$\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)).$$

Stąd $\vdash A \vee B \rightarrow C$, co oznacza $[A \vee B] \leq [C]$.

Dystrybutywność wynika wprost z udowodnionych ostatnio tez:

$$A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C),$$

oraz

$$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C).$$

Pokażemy, że $1 = [A]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\vdash A$. Istotnie, założymy, że $1 = [A]$. Wtedy dla dowolnej formuły B mamy $\vdash B \rightarrow A$, w szczególności dla dowolnej tezy. Stosując regułę odrywania otrzymujemy, że $\vdash A$. Na odwrót, założymy, że $\vdash A$. Niech B będzie dowolną formułą. Mamy wówczas

$$\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A).$$

Stąd $\vdash B \rightarrow A$, czyli $[B] \leq [A]$, a zatem $[A] = 1$.

Pokażemy, że $0 = [A]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\vdash \neg A$. Istotnie, założymy, że $0 = [A]$. Wtedy dla dowolnej formuły B mamy $\vdash A \rightarrow B$, w szczególności dla $B = \neg A$ mamy $\vdash A \rightarrow \neg A$. Ponadto:

$$\vdash (A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A.$$

Stosując regułę odrywania otrzymujemy, że $\vdash \neg A$. Na odwrót, założymy, że $\vdash \neg A$. Niech B będzie dowolną formułą. Mamy wówczas

$$\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B).$$

Stąd $\vdash A \rightarrow B$, czyli $[A] \leq [B]$, a zatem $[A] = 0$.

Na koniec pokażemy, że $\neg[A] = [\neg A]$. Istotnie, mamy

$$[A] \cup [\neg A] = [A \vee \neg A] = 1,$$

$$[A] \cap [\neg A] = [A \wedge \neg A] = 0.$$

Algebrę $(L^\sim, \leq)$ nazywamy **algebrą Lindenbauma** KRZ. Działania w $(L^\sim, \leq)$ określone są następująco:

- ▶ $[A] \cap [B] = [A \wedge B]$,
- ▶ $[A] \cup [B] = [A \vee B]$,
- ▶ $-[A] = [\neg A]$,
- ▶ $1 = [p \vee \neg p]$,
- ▶ $0 = [p \wedge \neg p]$.

W dalszym ciągu rozważać będziemy algebrę Boole'a jako podobną do algebry języka KRZ, czyli algebrę postaci

$$(B, -, \cup, \cap, \Rightarrow),$$

gdzie

$$x \Rightarrow y = -x \cup y.$$

W szczególności zauważmy, iż w algebrze Lindenbauma:

$$[A] \Rightarrow [B] = -[A] \cup [B] = [\neg A \vee B] = [A \rightarrow B].$$

Twierdzenie (o zgodności)

Każda teza KRZ jest tautologią matrycy $\mathcal{M}_2$.

Dowód.

Zauważyliśmy już, że każdy aksjomat jest tautologią i że zbiór tautologii jest domknięty na regułę odrywania. Dowód przeprowadzimy przez indukcję ze względu na długość tezy. Niech $\vdash A$ i niech $A_1, \dots, A_l = A$ będzie dowodem A . Jeśli $l = 1$, to $A_1 = A$ jest aksjomatem, a więc tautologią. Załóżmy, że $i > 1$ i że dla $j < i$ A_j są tautologiami. A zatem A_j jest aksjomatem, a więc tautologią, albo dla pewnych $j, k < i$ mamy

$$A_k = A_j \rightarrow A_i, \dots, A_j, \dots, A_j \rightarrow A_i, \dots, A_i.$$

Z założenia indukcyjnego A_j oraz $A_j \rightarrow A_i$ są tautologiami, a zatem A_i jest tautologią. □

Twierdzenie (o pełności)

Każda tautologia $\mathcal{M}_2$ jest tezą KRZ.

Dowód twierdzenia poprzedzimy lematem. Oznaczmy przez AL algebrę Lindenbauma KRZ.

Lemat

Niech ϕ będzie homomorfizmem AL w $\mathbf{B}_2$. Niech $\psi : P \rightarrow \{0, 1\}$ będzie wartościowaniem takim, że

$$\psi(p) = \phi([p]) \text{ dla } p \in P.$$

Wówczas

$$\psi(A) = \phi([A]) \text{ dla dowolnej formuły } A.$$

Wartościowanie takie jak w lemacie nazywać będziemy **indukowanym** przez ϕ .

Dowód.

Dowód prowadzimy przez indukcję względem budowy formuły A .
Zauważmy na wstępie, że ψ przedłuża się jednoznacznie do homomorfizmu algebry języka KRZ w $\mathbf{B}_2$.

Założmy, że A jest zmienną, $A = p$ – wówczas twierdzenie jest prawdziwe w myśl założenia.

Założmy, że $A = \neg B$. Wówczas:

$$\psi(A) = \psi(\neg B) = -\psi(B) = -\phi([B]) = \phi(-[B]) = \phi([\neg B]) = \phi([A]).$$

Przypadki, gdy $A = B \wedge C$, $A = B \vee C$ oraz $A = B \rightarrow C$ pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie.



Przechodzimy teraz do dowodu twierdzenia o pełności.

Dowód.

Założmy, że $\not\models A$.

Pokażemy, że $A \notin E(\mathcal{M}_2)$.

Istotnie, skoro $\not\models A$, to w AL mamy, że $[A] \neq 1$.

Zatem $\neg[A] \neq 0$, czyli $[\neg A] \neq 0$.

Wobec twierdzenia o istnieniu ultrafiltru istnieje ultrafiltr F algebry AL zawierający $[\neg A]$. W szczególności $AL/F \cong \mathbf{B}_2$.

Niech ψ będzie wartościowaniem indukowanym przez kanoniczny homomorfizm $\kappa : AL \rightarrow AL/F$.

Wówczas

$$\psi(\neg A) = \kappa([\neg A]) = 1,$$

a zatem $\psi(A) = 0$, czyli $A \notin E(\mathcal{M}_2)$.



Wniosek

KRZ jest rozstrzygalny w intuicyjnym sensie, tzn. istnieje efektywna procedura dająca odpowiedź, czy $\vdash A$ czy $\nvdash A$.

Twierdzenie (Malcev)

Niech Σ będzie dowolnym zbiorem formuł języka KRZ. Wówczas Σ jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy Σ jest spełnialny.

Dowód: ($\Leftarrow$) Załóżmy, że Σ jest sprzeczne. Zatem pewien jego skończony podzbiór Σ' jest sprzeczny. Mamy

$$\Sigma' \vdash A \wedge A'$$

dla pewnej formuły A . Niech $B = \bigwedge \{C : C \in \Sigma'\}$. Na mocy twierdzenia o dedukcji:

$$\vdash B \rightarrow (A \wedge \neg A).$$

Z twierdzenia o zgodności

$$B \rightarrow (A \wedge \neg A) \in E(\mathcal{M}_2),$$

czyli dla każdego wartościowania $\phi : P \rightarrow \{0, 1\}$ mamy

$$\phi(B \rightarrow (A \wedge \neg A)) = 1.$$

Ale zawsze mamy również

$$\phi(A \wedge \neg A) = 0.$$

Stąd $\phi(B) = 0$ dla każdego wartościowania ϕ , czyli Σ' jest niespełnialny, a więc i Σ jest niespełnialny.

($\Rightarrow$) Załóżmy, że Σ jest niespełnialny. Z twierdzenia o zwartości, pewien skończony podzbiór Σ' zbioru Σ jest niespełnialny. Niech

$$B = \bigwedge \{C : C \in \Sigma'\}.$$

Stąd $\phi(B) = 0$ dla każdego wartościowania ϕ , więc B jest kontrtautologią. A zatem $\neg B \in E(\mathcal{M}_2)$. Stąd, na mocy twierdzenia o pełności, $\vdash \neg B$. Ale

$$\Sigma' \vdash C \text{ dla } C \in \Sigma'$$

więc w szczególności

$$\Sigma' \vdash B.$$

Zatem $\Sigma' \vdash B \wedge \neg B$, czyli Σ' jest sprzeczny, a więc i Σ jest sprzeczny.

Rachunek predykatów

Język pierwszego rzędu składa się z:

- ▶ symboli relacyjnych P_i , $i \in I$, gdzie $\sharp(P_i)$ oznaczać będzie ilość argumentów symbolu P_i ,
- ▶ symboli funkcyjnych f_j , $j \in J$, gdzie $\sharp(f_j)$ oznaczać będzie ilość argumentów f_j ,
- ▶ stałych c_k , $k \in K$.

Formalnie język będziemy definiowali jako zbiór

$L = \{(P_i)_{i \in I}, (f_j)_{j \in J}, (c_k)_{k \in K}\}$. P_i, f_j, c_k nazywamy symbolami pozalogicznymi.

Symbole logiczne, niezależne od L , są następujące:

- ▶ $\neg, \rightarrow$;
- ▶ zbiór zmiennych indywiduowych $V = \{v_0, v_1, v_2, \dots\}$;
- ▶ kwantyfikator $\forall$;
- ▶ binarny symbol relacyjny $\equiv$ odpowiadający identyczności;
- ▶ nawiasy.

Moc $||L||$ języka L definiujemy jako większą z liczb $\aleph_0$ lub moc zbioru symboli.

Sygnaturą (lub **typem**) języka L nazywamy ciąg $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$, gdzie $\tau_1(i) = \sharp(P_i)$, $\tau_2(j) = \sharp(f_j)$, $\tau_3(k) = 0$, dla $k \in K$.

L' jest **wzbogaceniem języka** L , gdy $L' = L \cup X$, gdzie X jest zbiorem pewnych symboli.

Wtedy L nazywamy **reduktem** języka L' .

Zbiór **termów** T języka L definiujemy następująco:

- ▶ $V \subset T$,
- ▶ $c_k \in T$ dla każdego $k \in K$,
- ▶ jeżeli f jest symbolem funkcyjnym n –argumentowym i $t_1, \dots, t_n$ są termami, to

$$ft_1 \dots t_n$$

jest termem.

Zbiór **formuł atomowych** języka L składa się z wyrażeń postaci:

- ▶ $t_1 \equiv t_2$, dla $t_1, t_2 \in T$;
- ▶ $Pt_1 \dots t_n$, gdzie P jest n –argumentowym symbolem relacyjnym i $t_1, \dots, t_n \in T$.

Zbiór **formuł** języka L jest najmniejszym zbiorem spełniającym warunki:

- ▶ zawiera on zbiór wszystkich formuł atomowych;
- ▶ jeżeli A, B są formułami i x jest zmienną indywiduową, to

$$\neg A, A \rightarrow B, \forall x(A)$$

są formułami.

Podformułę definiujemy w analogiczny sposób.

Zauważmy, że moc zbioru wszystkich formuł języka L jest równa $||L|$.

Definiujemy również:

- ▶ $\exists x(A) = \neg \forall x \neg A$;
- ▶ $A \vee B = \neg A \rightarrow B$;
- ▶ $A \wedge B = \neg(A \rightarrow \neg B)$;
- ▶ $A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

Zbiór **zmiennych wolnych** termu, $vf(t)$, definiujemy następująco:

- ▶ $vf(x) = \{x\}$,
- ▶ $vf(c) = \emptyset$,
- ▶ $vf(ft_1 \dots t_n) = vf(t_1) \cup \dots \cup vf(t_n)$.

Z kolei zbiór **zmiennych związanych** termu $vb(f)$ jest zawsze zbiorem pustym.

Zbiór **zmiennych wolnych** formuły A , $vf(A)$, definiujemy następująco:

- ▶ $vf(t_1 \equiv t_2) = vf(t_1) \cup vf(t_2)$;
- ▶ $vf(Pt_1 \dots t_n) = vf(t_1) \cup \dots \cup vf(t_n)$;
- ▶ $vf(\neg A) = vf(A)$;
- ▶ $vf(A \rightarrow B) = vf(A) \cup vf(B)$;
- ▶ $vf(\forall x A) = vf(A) \setminus \{x\}$.

Zbiór **zmiennych związanych** formuły A , $vb(A)$, definiujemy następująco:

- ▶ $vb(A) = \emptyset$ dla każdej formuły atomowej A ;
- ▶ $vb(\neg A) = vb(A)$;
- ▶ $vb(A \rightarrow B) = vb(A) \cup vb(B)$;
- ▶ $vb(\forall x A) = vb(A) \cup \{x\}$.

Formułę nazywamy **zdaniem**, gdy $vf(A) = \emptyset$. Piszemy $A(x_1, \dots, x_n)$, gdy $vf(A) \subset \{x_1, \dots, x_n\}$.

Przykład:

1. Niech $A = \forall v_0 P_0 v_0 v_1 v_2 \rightarrow \forall v_1 P_1 v_1$. Wówczas $vf(A) = \{v_1, v_2\}$ oraz $vb(A) = \{v_0, v_1\}$.

Operację **podstawiania** termu t za zmienną x , (x/t) , definiujemy następująco:

- ▶ $y(x/t) = \begin{cases} t, & \text{gdy } x = y \\ y, & \text{gdy } x \neq y \end{cases},$
- ▶ $c(x/t) = c,$
- ▶ $ft_1 \dots t_n(x/t) = ft_1(x/t) \dots t_n(x/t),$
- ▶ $Pt_1 \dots t_n(x/t) = Pt_1(x/t) \dots t_n(x/t),$
- ▶ $(\neg A)(x/t) = \neg(A(x/t)),$
- ▶ $(A \rightarrow B)(x/t) = A(x/t) \rightarrow B(x/t),$
- ▶ $(\forall y A)(x/t) = \begin{cases} \forall y A, & \text{gdy } x = y \text{ lub } y \in \text{vf}(t), \\ \forall y (A(x/t)), & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$

Przykład:

2. Niech $A = \forall x(Px \rightarrow Px) \rightarrow (Px \rightarrow \forall xPx)$. Wówczas
 $A(y/x) = \forall x(Px \rightarrow Px) \rightarrow (Px \rightarrow \forall xPx)$. Ponadto
 $A(y/x)(y/c) = \forall x(Pc \rightarrow Px) \rightarrow (Px \rightarrow \forall xPx)$.
Zinterpretujmy Px jako " $x = 0$ " oraz niech $c = 1$. Wówczas
formuła $\forall x(y = 0 \rightarrow x = 0) \rightarrow (y = 0 \rightarrow \forall xx = 0)$ jest
prawdziwa, natomiast formuła
 $\forall x(1 = 0 \rightarrow x = 0) \rightarrow (x = 0 \rightarrow \forall xx = 0)$ jest fałszywa.
Widzimy więc, że przez podstawianie możemy z formuły
prawdziwej otrzymać fałszywą.

Zbiór **zmiennych wolnych dla termu** t w formule A , $Ff(t, A)$, definiujemy następująco: $x \in Ff(t, A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

- ▶ $x \notin vf(A)$,
- ▶ $x \in vf(A)$ oraz
 - ▶ A jest formułą atomową,
 - ▶ $A = \neg B$ i $x \in Ff(t, B)$,
 - ▶ $A = B \rightarrow C$ i $x \in Ff(t, B) \cap Ff(t, C)$,
 - ▶ $A = \forall y B$ i $y \notin vf(t)$ i $x \in Ff(t, B)$.

Niech $M \neq \emptyset$. **Interpretacją** języka L w zbiorze M nazywamy odwzorowanie I takie, że

- ▶ $I(P_i) \subset M^{\sharp(P_i)}$,
- ▶ $I(f_j) : M^{\sharp(f_j)} \rightarrow M$,
- ▶ $I(c_k) \in M$.

Modelem (albo **strukturą**) dla L nazywamy parę $\mathfrak{M} = (M, I)$. Dla wygody zamiast $I(P_i)$, $I(f_j)$, $I(c_k)$ piszemy $P_i^{\mathfrak{M}}$, $f_j^{\mathfrak{M}}$ i $c_k^{\mathfrak{M}}$ oraz, gdy L zawiera skończenie wiele symboli pozalogicznych:

$$\mathfrak{M} = (M, P_1^{\mathfrak{M}}, \dots, P_i^{\mathfrak{M}}, f_1^{\mathfrak{M}}, \dots, f_j^{\mathfrak{M}}, c_1^{\mathfrak{M}}, \dots, c_k^{\mathfrak{M}}).$$

Moc modelu określamy jako moc zbioru M .

Rozważmy język L i jego rozszerzenie L' o pewien zbiór nowych symboli X . Niech $\mathfrak{M} = (M, I)$ będzie modelem dla L i niech I' będzie interpretacją symboli należących do X w M . Wówczas $\mathfrak{M}' = (M, I \cup I')$ nazywamy **rozszerzeniem** modelu $\mathfrak{M}$, a $\mathfrak{M}$ **reduktem** modelu $\mathfrak{M}'$.

Redukt modelu $\mathfrak{M} = (M, I)$ do modelu $\mathfrak{M}' = (M, I')$ takiego, że I' jest interpretacją L zwężoną jedynie do symboli funkcyjnych i stałych, jest algebrą.

Model $\mathfrak{N} = (N, \{P_i^{\mathfrak{N}}\}, \{f_j^{\mathfrak{N}}\}, \{c_k^{\mathfrak{N}}\})$ nazywamy **podmodelem** modelu $\mathfrak{M} = (M, \{P_i^{\mathfrak{M}}\}, \{f_j^{\mathfrak{M}}\}, \{c_k^{\mathfrak{M}}\})$ gdy:

- ▶ $N \subset M$, $f_j^{\mathfrak{N}} = f_j^{\mathfrak{M}}|_N$, $c^{\mathfrak{N}} = c^{\mathfrak{M}}$,
- ▶ dla dowolnych $a_1, \dots, a_n \in N$:

$P_i^{\mathfrak{N}}(a_1, \dots, a_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P_i^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n)$.

Odwzorowanie $\phi : M \rightarrow N$ jest **izomorfizmem modeli** $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ gdy

- ▶ ϕ jest izomorfizmem odpowiednich algebr,
- ▶ dla dowolnych $a_1, \dots, a_n \in M$:

$P_i^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P_i^{\mathfrak{N}}(\phi(a_1), \dots, \phi(a_n))$.

Rozważmy model $\mathfrak{M}$ języka L i oznaczmy przez V zbiór wszystkich zmiennych indywiduowych. Odwzorowanie $\alpha : V \rightarrow M$ nazywamy **wartościowaniem** w M .

Wartość termu $t^{\mathfrak{M}}[\alpha] \in M$ definiujemy następująco:

- ▶ $(v_i)^{\mathfrak{M}}[\alpha] = \alpha(v_i),$
- ▶ $(c_k)^{\mathfrak{M}}[\alpha] = c_k^{\mathfrak{M}},$
- ▶ $(f_j t_1 \dots t_n)^{\mathfrak{M}}[\alpha] = f_j^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}[\alpha], \dots, t_n^{\mathfrak{M}}[\alpha]).$

Niech A będzie formułą języka L , $\mathfrak{M}$ modelem dla języka L , a α wartościowaniem w M . Definiujemy **spełnialność** formuły A w modelu $\mathfrak{M}$ z wartościowaniem α , $\mathfrak{M} \models A[\alpha]$:

- ▶ $\mathfrak{M} \models (t \equiv s)[\alpha]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $t^{\mathfrak{M}}[\alpha] = s^{\mathfrak{M}}[\alpha]$,
- ▶ $\mathfrak{M} \models Pt_1 \dots t_n[\alpha]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}[\alpha], \dots, t_n^{\mathfrak{M}}[\alpha])$,
- ▶ $\mathfrak{M} \models \neg A[\alpha]$ wtedy i tylko wtedy, gdy nieprawda, że $\mathfrak{M} \models A[\alpha]$,
- ▶ $\mathfrak{M} \models (A \vee B)[\alpha]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models A[\alpha]$ lub $\mathfrak{M} \models B[\alpha]$,
- ▶ $\mathfrak{M} \models (A \wedge B)[\alpha]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models A[\alpha]$ i $\mathfrak{M} \models B[\alpha]$,
- ▶ $\mathfrak{M} \models (A \rightarrow B)[\alpha]$ wtedy i tylko wtedy, gdy nieprawda, że $\mathfrak{M} \models A[\alpha]$ lub $\mathfrak{M} \models B[\alpha]$,
- ▶ $\mathfrak{M} \models \forall x A[\alpha]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models A[\alpha \frac{x}{a}]$ dla każdego $a \in M$,
- ▶ $\mathfrak{M} \models \exists x A[\alpha]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models A[\alpha \frac{x}{a}]$ dla pewnego $a \in M$,

przy czym

$$x \quad \left(\alpha(y) \text{ dla } y \neq x. \right.$$

Formuła A jest **prawdziwa** w $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \models A$, gdy $\mathfrak{M} \models A[\alpha]$ dla każdego wartościowania $\alpha : V \rightarrow M$.

Formuła A jest **tautologią** (lub jest **ogólnie prawdziwa**), $\models A$,
gdy $\mathfrak{M} \models A$ dla każdego modelu $\mathfrak{M}$.

Lemat

Rozważmy model $\mathfrak{M}$ dla języka L i formułę A tego języka.

Wówczas dla dowolnych wartościowań α, β , jeżeli $\alpha(a) = \beta(x)$ dla wszystkich $x \in \text{vf}(A)$, to

$$\mathfrak{M} \models A[\alpha] \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathfrak{M} \models A[\beta].$$

Ponieważ spełnialność formuły zależy wyłącznie od wartościowania jej zmiennych, dla formuły $A(x_1, \dots, x_n)$ i wartościowania α takiego, że $\alpha(x_i) = a_i$, dla $1 \leq i \leq n$, będziemy pisać

$$\mathfrak{M} \models A(x_1, \dots, x_n)[a_1, \dots, a_n].$$

Lemat

Niech $A = A(y_1, \dots, y_n)$. Rozważmy termy $t_1(x_1, \dots, x_m), \dots, t_n(x_1, \dots, x_m)$ takie, że $y_i \in Ff(t_i, A)$ dla $1 \leq i \leq n$. Niech α będzie dowolnym wartościowaniem i przyjmijmy, że $\alpha(x_i) = a_i$ dla $1 \leq i \leq m$. Wtedy

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &\models A(y_1/t_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n/t_n(x_1, \dots, x_m))[a_1, \dots, a_m] \\ \Leftrightarrow \mathfrak{M} &\models A(y_1, \dots, y_n)[t_1^{\mathfrak{M}}[a_1, \dots, a_m], \dots, t_n^{\mathfrak{M}}[a_1, \dots, a_m]]. \end{aligned}$$

Ustalmy język L . **Aksjomatami rachunku predykatów** (lub **klasycznego rachunku kwantyfikatorów** lub **KRK**) są domknięcia względem wszystkich układów zmiennych formuł danych za pomocą następujących schematów:

- (Q0) domknięcia schematów aksjomatów KRZ w języku $\{\neg, \rightarrow\}$, np. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ itd.
- (Q1) $\forall x A \rightarrow A(t/x)$ dla $x \in Ff(t, A)$,
- (Q2) $\forall x (A \rightarrow B) \rightarrow (\forall x A \rightarrow \forall x B)$,
- (Q3) $A \rightarrow \forall x A$, gdzie $x \notin vf(A)$,
- (Q4) aksjomaty identyczności: dla dowolnych termów $t_1, t_2, t_3, t'_1, t'_2, t'_3$ i dowolnych symboli funkcyjnych f i relacyjnych P :
 - ▶ $t_1 \equiv t_1$,
 - ▶ $t_1 \equiv t_2 \rightarrow t_2 \equiv t_1$,
 - ▶ $t_1 \equiv t_2 \wedge t_2 \equiv t_3 \rightarrow t_1 \equiv t_3$,
 - ▶ $(t_1 \equiv t'_1 \wedge \dots \wedge t_n \equiv t'_n) \rightarrow (ft_1 \dots t_n \equiv ft'_1 \dots t'_n)$,
 - ▶ $(t_1 \equiv t'_1 \wedge \dots \wedge t_n \equiv t'_n) \rightarrow (Pt_1 \dots t_n \rightarrow Pt'_1 \dots t'_n)$,

Ponadto definiujemy **regułę odrywania**:

$$A \quad A \rightarrow B$$

W szczególności każda teza KRZ jest tautologią KRK.

Twierdzenie

Niech Γ będzie zbiorem formuł języka L takim, że zmienna x nie występuje jako zmienna wolna w żadnej formule tego zbioru. Wówczas, dla dowolnej formuły $A(x, \vec{y})$ mamy:

$$\Gamma \vdash A(x, \vec{y}) \Rightarrow \Gamma \vdash \forall x A(x, \vec{y})$$

Dowód.

Dowód prowadzimy przez indukcję względem długości formuły A .

- ▶ Jeżeli A jest aksjomatem, to $\forall xA$ jest aksjomatem.
- ▶ Jeżeli $A \in \Gamma$, to $x \notin \text{vf}(A)$, zatem aksjomatem jest formuła $A \rightarrow \forall xA$. Czyli $\Gamma \vdash \forall xA$.
- ▶ Załóżmy, że A otrzymujemy w wyniku zastosowania reguły odrywania względem formuł B i $B \rightarrow A$.

Z założenia indukcyjnego

$$\Gamma \vdash \forall xB \text{ oraz } \Gamma \vdash \forall x(B \rightarrow A).$$

Ponadto, na mocy **(Q2)**, $\Gamma \vdash \forall xB \rightarrow \forall xA$. Stąd otrzymujemy

$$\Gamma \vdash \forall xA.$$



Lemat

Założmy, że $x \notin \text{vf}(A)$. Wówczas tezą naszego systemu jest:

$$\vdash \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall xB).$$

Dowód.

1. $\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall xA \rightarrow \forall xB)$, **(Q2)**
2. $\forall xA \rightarrow (\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow \forall xB)$, ponieważ
 $\vdash (E \rightarrow (F \rightarrow G)) \rightarrow (F \rightarrow (E \rightarrow G))$
3. $A \rightarrow \forall xA$, **(Q3)**, $x \notin \text{vf}(A)$,
4. $A \rightarrow (\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow \forall xB)$, z prawa sylogizmu,
5. $\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall xB)$, jak w (2).



Twierdzenie

Niech A i B będą dowolnymi formułami oraz niech C będzie taką formułą, że $x \notin \text{vf}(C)$. Niech ponadto Γ będzie takim zbiorem formuł, że x nie występuje jako zmienna wolna w żadnej formule tego zbioru. Wówczas:

1. $\Gamma \vdash C \rightarrow B \Rightarrow \Gamma \vdash C \rightarrow \forall xB, \left(\frac{C \rightarrow B}{C \rightarrow \forall xB} \right),$
2. $\Gamma \vdash A \rightarrow C \Rightarrow \Gamma \vdash \exists xA \rightarrow C, \left(\frac{A \rightarrow C}{\exists xA \rightarrow C} \right),$
3. $\Gamma \vdash A \rightarrow \forall xB \Rightarrow \Gamma \vdash A \rightarrow B, \left(\frac{A \rightarrow \forall xB}{A \rightarrow B} \right),$
4. $\Gamma \vdash \exists xA \rightarrow B \Rightarrow \Gamma \vdash A \rightarrow B, \left(\frac{\exists xA \rightarrow B}{A \rightarrow B} \right).$

Dowód.

Rozważmy dowody na gruncie Γ :

1. Załóżmy, że $\Gamma \vdash C \rightarrow B$.

Wówczas $\Gamma \vdash \forall x(C \rightarrow B)$.

Stąd, ponieważ $x \notin \text{vf}(C)$, na mocy poprzedniego Lematu $\Gamma \vdash C \rightarrow \forall x B$.

2. Kontrapozycja (1).

3. Załóżmy, że $\Gamma \vdash A \rightarrow \forall x B$.

Na mocy **(Q1)** mamy $\vdash \forall x B(x, \vec{y}) \rightarrow B(x, \vec{y})$, ponieważ $x \in Ff(x, B)$.

Zatem, na mocy praw KRZ, $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.

4. Kontrapozycja (3).



Lemat

Następujące formuły są tezami KRK:

1. $\forall xA \rightarrow \exists xA$ (*prawo egzemplifikacji*),
2. $\forall xA \leftrightarrow A, \exists xA \leftrightarrow A$, *gdy A jest zdaniem*,
3. $\forall xA(x, \vec{y}) \leftrightarrow \forall zA(z, \vec{y}), \exists xA(x, \vec{y}) \leftrightarrow \exists zA(z, \vec{y})$.

Twierdzenie (o dedukcji)

Niech Γ będzie zbiorem formuł języka L . Wtedy dla dowolnych formuł A i B :

$\Gamma \vdash A \rightarrow B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Gamma, A \vdash B$

Twierdzenie (o ekstensjonalności)

Niech Γ będzie zbiorem zdań oraz niech A będzie dowolną formułą języka L . Niech A^ powstaje z A przez zastąpienie pewnych wystąpień jej podformuły D formułą D' . Wówczas jeżeli $\Gamma \vdash D \leftrightarrow D'$, to $\Gamma \vdash A \leftrightarrow A^*$.*

Lemat

Założmy, że Γ jest zbiorem zdań. Wówczas, dla dowolnych A i B , jeżeli $\Gamma \vdash A \leftrightarrow B$, to $\Gamma \vdash \forall x A \leftrightarrow \forall x B$.

Dowód.

Założmy, że $\Gamma \vdash A \rightarrow B$. Wówczas:

$$\Gamma \vdash \forall x(A \rightarrow B).$$

Stąd

$$\Gamma \vdash \forall xA \rightarrow \forall xB.$$

Analogicznie dowodzimy, że $\Gamma \vdash B \rightarrow A$ pociąga
 $\Gamma \vdash \forall xB \rightarrow \forall xA$.



Przechodzimy do dowodu twierdzenia o ekstensjonalności.

Dowód.

Dowód prowadzimy przez indukcję względem budowy formuły, ograniczymy się przy tym do jednego przypadku, pozostałe zostawiając jako ćwiczenie. Załóżmy, że $A = \forall xB$. Wobec założenia indukcyjnego:

$$D \leftrightarrow D' \vdash B \leftrightarrow B^*.$$

Stąd, na mocy lematu:

$$D \leftrightarrow D' \vdash \forall xB \leftrightarrow \forall xB^*$$

czyli

$$D \leftrightarrow D' \vdash A \leftrightarrow A^*.$$



Mówimy, że zbiór formuł Γ jest **spełnialny**, gdy istnieje model $\mathfrak{M}$ i wartościowanie $\alpha : V \rightarrow M$ takie, że $\mathfrak{M} \models A[\alpha]$ dla każdej formuły $A \in \Gamma$.

Mówimy, że zbiór zdań Γ jest spełnialny, gdy dla pewnego modelu $\mathfrak{M}$ zachodzi $\mathfrak{M} \models A$ dla $A \in \Gamma$.

Twierdzenie (o istnieniu modelu)

Każdy niesprzeczny zbiór formuł jest spełnialny. W szczególności, każdy niesprzeczny zbiór zdań ma model.

Dowód tego twierdzenia pomijamy.

Wniosek (twierdzenie o pełności)

Dla dowolnego zbioru zdań Σ i dowolnego zdania A :

$$\Sigma \vdash A \Leftrightarrow \Sigma \models A.$$