

Algebrą nazywamy strukturę $\mathbf{A} = (A, \{F_i : i \in I\})$, gdzie A jest zbiorem zwanym **uniwersum algebry**, zaś $F_i : A^{\#F_i} \rightarrow A$ (symbol $\#F_i$ oznacza ilość argumentów funkcji F_i). W rozważanych przez nas algebrach I najczęściej będzie zbiorem skończonym. **Typem** (lub **sygnaturą**) algebry $\mathbf{A} = (A, \{F_i : i \in I\})$ nazywamy układ

$$\tau_{\mathbf{A}} = (\#F_i : i \in I).$$

Algebry $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są **podobne**, gdy $\tau_{\mathbf{A}} = \tau_{\mathbf{B}}$. Jeżeli $\sigma : I \rightarrow \mathbb{N}$ oraz $\tau : J \rightarrow \mathbb{N}$ spełniają warunki

1. $I \supset J$,
2. $\sigma(a) = \tau(a)$ dla $a \in J$,

to σ nazywamy **wzbogaceniem** typu τ , a τ **reduktem** typu σ .

Niech $\mathbf{A} = (A, \{F_i : i \in I\})$. **Kongruencją** algebry $\mathbf{A}$ nazywamy relację $R \subset A \times A$ taką, że

1. R jest relacją równoważności,
2. dla każdego $i \in I$ i dla dowolnych $a_1, \dots, a_n \in A$, gdzie $n = \sharp F_i$:

jeżeli $a_1 R b_1, \dots, a_n R b_n$, to $F_i(a_1, \dots, a_n) R G(b_1, \dots, b_n)$.

Niech $\mathbf{A} = (A, \{F_i : i \in I\})$ i niech R będzie kongruencją algebry $\mathbf{A}$. **Algebrą ilorazową** algebry $\mathbf{A}$ nazywamy algebrę

$$\mathbf{A}/R = (A/R, \{F_i^R : i \in I\}),$$

gdzie

$$F_i^R([a_1], \dots, [a_n]) = [F_i(a_1, \dots, a_n)],$$

dla każdego $i \in I$ i dla dowolnych $a_1, \dots, a_n \in A$, gdzie $n = \sharp F_i$. Epimorfizm $\kappa : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}/R$ dany wzorem

$$\kappa(a) = [a]$$

zwiemy **epimorfizmem kanonicznym**.

Ważnym dla nas przykładem algebr są **algebry Boole'a**, czyli algebry $\mathbf{B} = (B, \cap, \cup, -, 0, 1)$ typu $(2, 2, 1, 0, 0)$ spełniające własności:

1. $x \cup y = y \cup x, x \cap y = y \cap x,$
2. $x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z, x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z,$
3. $x \cup (x \cap y) = x, x \cap (x \cup y) = x,$
4. $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z), x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z),$
5. $x \cup -x = 1, x \cap -x = 0$

Kratą nazywamy parę $(K, \leq)$, gdzie $K \neq \emptyset$ i $\leq$ jest porządkiem takim, że dowolny skończony podzbiór zbioru K ma kresy.

Tradycyjnie oznaczamy

$$\inf_{\leq} \{x, y\} = x \wedge y \text{ oraz } \sup_{\leq} \{x, y\} = x \vee y.$$

Kratę $(K, \leq)$ nazywamy **dystybutywną** (lub **rozdzielczą**), jeśli dla dowolnych $x, y, z \in K$ mamy:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Kratą komplementarną nazywamy kratę $(K, \leq)$ taką, że

1. w K istnieją element największy $\top$ i element najmniejszy $\perp$,
2. dla dowolnego $x \in K$ istnieje $y \in K$ taki, że

$$x \wedge y = \perp \text{ oraz } x \vee y = \top.$$

Element y nazywamy wówczas **dopełnieniem** elementu x .

Stwierdzenie:

Niech **B** będzie algebrą Boole'a. Wówczas $(B, \leq)$ jest kratą dystrybutywną i komplementarną.

Twierdzenie:

Każda krata dystrybutywna i komplementarna spełnia aksjomaty algebry Boole'a, gdzie

- ▶ $\cup$ interpretujemy jako $\vee$,
- ▶ $\cap$ interpretujemy jako $\wedge$,
- ▶ $-$ interpretujemy jako operację tworzenia dopełnienia,
- ▶ 0 interpretujemy jako $\perp$,
- ▶ 1 interpretujemy jako $\top$.

Dowód:

Dowód jest w zasadzie trywialny – jedyna część, jaka wymaga komentarza to sprawdzenie drugiego aksjomatu, który jest spełniony bo

$$\inf\{x, \inf\{y, z\}\} = \inf\{\inf\{x, y\}, z\}.$$

Twierdzenie:

W dowolnej algebrze Boole'a spełnione są następujące związki:

1. $x \cap y = 0 \Leftrightarrow x \leq -y$, $x \cup y = 1 \Leftrightarrow -y \leq x$,
2. $x \cap -y = 0 \Leftrightarrow x \leq y$, $x \cup -y = 1 \Leftrightarrow y \leq x$,
3. $-(-x) = x$,
4. $-(x \cap y) = -x \cup -y$, $-(x \cup y) = -x \cap -y$,
5. $x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x$.

Dowód:

Pokażemy dla przykładu (3):

$$\begin{aligned} \neg(\neg x) &= \neg(\neg x) \cap 1 = \neg(\neg x) \cap (x \cup \neg x) \\ &= (\neg(\neg x) \cap x) \cup (\neg(\neg x) \cap \neg x) = \neg(\neg x) \cap x \end{aligned}$$

a więc $\neg(\neg x) \leq x$.

Podobnie

$$x = x \cap 1 = x \cap (\neg(\neg x) \cup \neg x) = (x \cap \neg(\neg x)) \cup (x \cap \neg x) = x \cap \neg(\neg x),$$

a więc $x \leq \neg(\neg x)$. Tym samym $\neg(\neg x) = x$.

Grafem skierowanym lub krótko **grafem** będziemy nazywać strukturę $G = (G_0, G_1, src, tgt)$, gdzie G_0 jest zbiorem **węzłów**, G_1 zbiorem **krawędzi**, a $src, tgt : G_1 \rightarrow G_0$ są funkcjami. Graf o skończonej liczbie węzłów i krawędzi nazywamy **grafem skończonym**.

Zapis

$$x \xrightarrow{f} y$$

oznacza $f \in G_1$, $x = src(f)$, $y = tgt(f)$.

Podgrafem G' grafu G nazywamy strukturę (G'_0, G'_1, src, tgt) taką, że

1. $G'_0 \subset G_0$,
2. $G'_1 \subset G_1$,
3. $src_{G'}(f) = src_G(f) \in G'_0$ dla każdej krawędzi $f \in G'_1$,
4. $tgt_{G'}(f) = tgt_G(f) \in G'_0$ dla każdej krawędzi $f \in G'_1$.

Podgrafy oznaczamy przez $G' \trianglelefteq G$.

Graf nazywamy **grafem prostym** gdy funkcja $(src, tgt) : G_1 \rightarrow G_0 \times G_0$ dana wzorem

$$(src, tgt)(f) = (src(f), tgt(f))$$

jest injekcją.

Oznacza to, że dwóch węzłów nie łączy “podwójna krawędź”.

Ścieżką skończoną w grafie G o długości n od $x \in G_0$ do $y \in G_0$ nazywamy ciąg krawędzi

$$x = x_0 \xrightarrow{f_1} x_2 \xrightarrow{f_2} x_3 \rightarrow \dots \xrightarrow{f_n} x_n = y$$

Dwa wężły są **połączone**, jeśli istnieje w grafie G ścieżka skończona od x do y lub od y do x .

Graf, w którym każde dwa wężły są połączone nazywamy **grafem spójnym**.

Ścieżkę, która zaczyna się i kończy w tym samym węźle nazywamy **cyklem**.

Jeżeli żadna ścieżka nie jest cyklem, to mówimy o grafie **acyklicznym**.

Dla wybranego wężła $x \in G_0$ oznaczamy:

$$x^+ = \{b \in G_0 \mid \text{istnieje krawędź } x \xrightarrow{f} b\},$$

$$x^- = \{a \in G_0 \mid \text{istnieje krawędź } a \xrightarrow{f} x\},$$

Drzewem nazywamy graf prosty, spójny i acykliczny oraz taki, że

1. istnieje dokładnie jeden węzeł k taki, że $k^- = \emptyset$, zwany **korzeniem**,
2. $|x^-| = 1$ dla każdego wężła innego od k .

Podgraf drzewa nazywamy **poddrzewem**.

Zbiór wszystkich poddrzew drzewa D oznaczamy przez $\text{sub}(D)$.

Zbiór wszystkich ścieżek od korzenia oznaczamy przez $\text{adr}(D)$.

Zauważmy, że zbiory $\text{sub}(D)$ i $\text{adr}(D)$ można utożsamiać;
poddrzewo odpowiadające ścieżce s oznaczać będziemy przez D/s .
Węzły dla których $x^+ = \emptyset$ nazywać będziemy **liśćmi**.

Tradycyjnie przez $[]$ oznaczać będziemy drzewo puste, przez $[x]$ drzewo złożone tylko z jednego węzła x oraz przez $[x|T_1; \dots; T_n]$ drzewo z korzeniem x i poddrzewami $T_1, \dots, T_n$.

Ponadto przez Trees_ω oznaczamy klasę wszystkich drzew przeliczalnych.

W tych oznaczeniach przyjmujemy definicję **wysokości** drzewa jako funkcji $h : \text{Trees}_\omega \rightarrow \mathbb{N}$ określonej rekurencyjnie jako

$$h(T) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } T = [], \\ 1, & \text{gdy } T = [x], \\ 1 + \max\{h(T_i) : 1 \leq i \leq n\}, & \text{gdy } T = [x|T_1; \dots; T_n]. \end{cases}$$

Zdefiniujemy jeszcze **zbiór okurencji** drzewa T' w T jako zbiór ścieżek

$$\omega(T', T) = \{s \in \text{adr}(T) \mid T' = T/s\}.$$

Definicja:

Niepusty podzbiór F uniwersum algebry Boole'a $\mathbf{B}$ nazywamy **filtrem**, gdy

1. $\forall x, y \in F (x \cap y \in F)$,
2. $\forall x \in F \forall y \in B (x \leq y \Rightarrow y \in F)$.

Przykłady:

1. Uniwersum dowolnej algebry Boole'a jest filtrem (filtrem niewłaściwym).
2. $\{1\}$.
3. Niech $a \in B$. Wtedy

$$\{x \in B : a \leq x\}$$

jest filtrem (filtr generowany przez element a , filtr główny).

3. Niech $\phi : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ będzie homomorfizmem algebr Boole'a.
Wtedy:

$$F_\phi = \{a \in A : \phi(a) = 1\}$$

jest filtrem w $\mathbf{A}$.

Uwaga:

Rozważamy wyłącznie filtry w algebrach Boole'a.

Uwaga:

F jest filtrem właściwym wtedy i tylko wtedy, gdy $0 \notin F$.

Dowód:

$(\Rightarrow)$:

Dowód prowadzimy przez kontrapozycję.

Założmy, że $0 \in F$.

Wówczas $a \in F$ dla każdego a , bo $0 \leq a$.

$(\Leftarrow)$:

Założmy, że F jest niewłaściwy.

Wówczas, w szczególności, $0 \in F$.

Definicja:

Niech $\mathbf{B}$ będzie algebrą Boole'a. Zbiór $X \subset B$ jest **scentrowany** (lub ma **własność iloczynu skończonego**), gdy dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in X$ jest

$$a_1 \cap \dots \cap a_n \neq 0.$$

Twierdzenie:

Każdy zbiór scentrowany można rozszerzyć do filtru właściwego.

Dowód:

Niech $X \subset B$ będzie zbiorem scentrowanym algebry Boole'a B .
Rozważmy zbiór:

$$F_X = \{a \in B : \text{dla pewnych } x_1, \dots, x_n \in X, a \geq x_1 \cap x_2 \cap \dots \cap x_n\}.$$

Sprawdzamy, że F_X jest filtrem.

Filtr ten nazywamy **filtrem generowanym przez X** , czyli najmniejszym filtrem zawierającym X .

Oczywiście $X \subset F_X$.

Pokażemy, że F_X jest filtrem właściwym.

Gdyby tak nie było, to $0 \in F_X$, czyli

$$\text{dla pewnych } x_1, \dots, x_n \in X, 0 \geq x_1 \cap x_2 \cap \dots \cap x_n$$

co jest sprzeczne z założeniem scentrowania zbioru X .

Definicja:

Filtr F algebry Boole'a $\mathbf{B}$ nazywamy **maksymalnym**, gdy F jest elementem maksymalnym względem relacji $\subset$ w rodzinie filtrów właściwych algebry $\mathbf{B}$.

Twierdzenie Tarskiego (1930, BPI theorem):

Każdy filtr właściwy algebry Boole'a można rozszerzyć do filtru maksymalnego.

Dowód:

Niech F będzie filtrem właściwym algebry Boole'a $\mathbf{B}$.

Rozważmy

$$\mathcal{F} = \{G : G \text{ jest filtrem właściwym w } \mathbf{B} \text{ oraz } F \subset G\}.$$

Ponieważ $F \in \mathcal{F}$, więc $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

Pokażemy, że każdy łańcuch w $\mathcal{F}$ ma ograniczenie górne w $\mathcal{F}$.

Niech $\mathcal{L}$ będzie łańcuchem w $\mathcal{F}$.

Rozważmy $\bigcup \mathcal{L}$.

Pokażemy, że $\bigcup \mathcal{L} \in \mathcal{F}$.

Istotnie, zauważmy, że $\bigcup \mathcal{L}$ jest filtrem.

Niech bowiem $a, b \in \bigcup \mathcal{L}$.

Wtedy $a \in G_a$, $b \in G_b$, dla pewnych $G_a, G_b \in \mathcal{L}$.

Możemy zakładać, że $G_a \subset G_b$.

Wobec tego $a, b \in G_b$.

Stąd $a \cap b \in G_b \subset \bigcup \mathcal{L}$.

Dalej, niech $a \in \bigcup \mathcal{L}$ i niech $x \in B$ będzie takie, że $a \leq x$.

Ale $a \in G_a$ dla pewnego $G_a \in \mathcal{L}$, skąd $x \in G_a \subset \bigcup \mathcal{L}$.

Zauważmy następnie, że $\bigcup \mathcal{L} \neq B$.

Istotnie, gdyby $0 \in \bigcup \mathcal{L}$, to wówczas $0 \in G_a$ dla pewnego $G_a \in \bigcup \mathcal{F}$, co jest sprzecznością.

Na koniec zauważmy jeszcze, że $F \subset \bigcup \mathcal{L}$. Tym samym pokazaliśmy, że $\bigcup \mathcal{L} \in \mathcal{F}$, więc na mocy lematu Kuratowskiego-Zorna w rodzinie $(\mathcal{F}, \subset)$ istnieje element maksymalny.

Wniosek:

1. Każdy zbiór scentrowany algebry Boole'a **B** można rozszerzyć do filtru maksymalnego.
2. Każdy element $a \neq 0$ należy do pewnego filtru maksymalnego.
3. Dla dowolnych a, b takich, że $a \neq b$ istnieje filtr maksymalny F taki, że

$$(a \in F \wedge b \notin F) \vee (b \in F \wedge a \notin F).$$

Lemat:

W dowolnej algebrze Boole'a:

1. $x \cup 0 = x$,
2. $x \cup 1 = 1$,
3. $-(x \cap y) = -x \cup -y$.

Twierdzenie:

Niech F będzie filtrem w algebrze Boole'a $\mathbf{B}$. Wówczas relacja $\sim_F$ dana wzorem:

$$x \sim_F y \Leftrightarrow \text{istnieje } u \in F : x \cap u = y \cap u$$

jest kongruencją algebry.

Dowód:

Relacja $\sim_F$ jest równoważnością, co łatwo sprawdzić:

jest zwrotna, czyli $x \sim_F x$, bo $x \cap 1 = x \cap 1$ i $1 \in F$;

jest symetryczna, czyli $x \sim_F y \Rightarrow y \sim_F x$, bo $x \cap u = y \cap u$ jest równoważne $y \cap u = x \cap u$;

jest też przechodnia, założmy bowiem, że $x \sim_F y$ oraz $y \sim_F z$,
czyli że dla pewnych $u, w \in F$:

$$x \cap u = y \cap u \text{ oraz } y \cap w = z \cap w.$$

Rozważmy element $u \cap w \in F$.

Mamy:

$$\begin{aligned} x \cap (u \cap w) &= (x \cap u) \cap w = (y \cap u) \cap w \\ &= (y \cap w) \cap u = (z \cap w) \cap u \\ &= z \cap (u \cap w), \end{aligned}$$

co kończy dowód przechodniości.

Założmy, że $x \sim_F x'$ i $y \sim_F y'$.

Pozostaje wykazać, że

$$(x \cap y) \sim_F (x' \cap y'), (x \cup y) \sim_F (x' \cup y') \text{ i } \neg x \sim_F \neg x'.$$

Pokażemy, dla przykładu, ostatnią własność.

Istotnie:

$$x \cap u = x' \cap u$$

oznacza, że również

$$-(x \cap u) = -(x' \cap u),$$

czyli

$$-x \cup -u = -x' \cup -u,$$

a stąd

$$u \cap (-x \cup -u) = u \cap (-x' \cup -u),$$

a więc

$$-x \cap u = -x' \cap u.$$

Uwaga:

Niech **B** będzie algebrą Boole'a i niech $\sim$ będzie jej kongruencją.
Wtedy

$$F_{\sim} = \{x \in B : x \sim 1\}$$

jest filtrem. Ponadto $\sim_{F_{\sim}} = \sim$.

Jeżeli F jest filtrem algebry Boole'a $\mathbf{B}$, to zamiast $\mathbf{B}/\sim_F$ będziemy pisać po prostu $\mathbf{B}/F$.

Filtr F algebry Boole'a $\mathbf{B}$ nazywamy **pierwszym**, gdy dla dowolnych $a, b \in B$, jeżeli $a \cup b \in F$, to $a \in F$ lub $b \in F$.

Twierdzenie:

Niech F będzie filtrem maksymalnym algebry Boole'a $\mathbf{B}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

1. F jest maksymalny,
2. F jest pierwszy,
3. dla dowolnego $a \in B$ albo $a \in F$, albo $-a \in F$,
4. $\mathbf{B}/F \cong \mathbf{B}_2$.

Dowód:

(1) $\Rightarrow$ (2) :

Przypuśćmy, że F nie jest filtrem pierwszym.

Niech a, b będą takie, że

$$a \cup b \in F \text{ oraz } a \notin F, b \notin F.$$

Rozważmy zbiór $G = \{x \in B : \text{istnieje } u \in F : x \geq a \cap u\}$.

Oczywiście $F \subset G$.

Pokażemy, że $G \neq B$, w szczególności $b \notin G$.

Faktycznie, gdyby $b \in G$ to mielibyśmy $b \geq a \cap u$, dla pewnego $u \in F$.

Stąd $b = b \cup (a \cap u) = \underbrace{(b \cup a)}_{\in F} \cap \underbrace{(b \cup u)}_{\geq u \in F} \in F$, co jest sprzecznością.

Zatem F nie może być filtrem maksymalnym, co również byłoby sprzecznością.

(2) $\Rightarrow$ (3) :

Założmy, że F jest pierwszy.

Wówczas

$$a \cup -a = 1 \in F \text{ dla dowolnego } a \in B,$$

a stąd $a \in F$ lub $-a \in F$ i nie może być jednocześnie $a \in F$ oraz $-a \in F$.

(3) $\Rightarrow$ (4) :

Rozważmy algebrę ilorazową $\mathbf{B}/F$, gdzie F jest filtrem mającym własność (3).

W $\mathbf{B}/F$ mamy:

$$1 = F \text{ oraz } 0 = \{-a : a \in F\}.$$

Istotnie, zobaczmy, że $1 = F$.

Ustalmy $a \in F$.

Wówczas $a \sim_F 1$, bo $a \cap a = a \cap 1$.

Na odwrót, załóżmy, że $a \sim_F 1$.

Wówczas dla pewnego $u \in F$ zachodzi $a \cap u = u \cap 1 = u$, skąd $u \leq a$, czyli $a \in F$.

Dalej, sprawdźmy, że $0 = \{-a : a \in F\}$.

Faktycznie:

$$\begin{aligned} 0 &= \{x \in B : x \sim_f 0\} \\ &= \{x \in B : \text{istnieje } u \in F : x \cap u = 0\} \\ &= \{x \in B : u \leq -x\} \\ &= \{-x : x \in F\}. \end{aligned}$$

Ustalmy teraz $a \in B$.

Mamy, że $a \in F$ i wtedy $[a] = 1$, albo $-a \in F$ i wtedy $[a] = 0$.

(4) $\Rightarrow$ (1) :

Przypuśćmy, że F nie jest maksymalny, czyli że istnieje filtr właściwy G taki, że $F \subsetneq G$.

Niech $a \in G \setminus F$.

Rozważmy $\mathbf{B}/F$.

Mamy:

$$[a] \neq 1 \text{ oraz } [a] \neq 0,$$

bo gdyby $[a] = 0$, to $-a \in F \subset G$, ale $a \in G$ i G jest filtrem właściwym.

Stąd otrzymujemy sprzeczność.

Definicja:

Dowolny filtr właściwy spełniający jeden z powyższych równoważnych warunków nazywamy **ultrafiltrem**.

Interesować nas będą głównie ultrafiltry w algebrach potęgowych.
Niech $I \neq \emptyset$.

Mówimy, że F jest **filtrem nad zbiorem I** , gdy F jest filtrem w algebrze potęgowej $(2^I, \subset)$.

Wprost z definicji filtrem głównym w algebrze potęgowej będzie

$$F_A = \{X : A \subset X\}.$$

Uwaga:

Niech F będzie filtrem głównym nad I . Wówczas F jest ultrafiltrem wtedy i tylko wtedy, gdy F jest generowany przez zbiór jednoelementowy.

Dowód:

$(\Rightarrow)$:

Niech X generuje F i przypuśćmy, że $x, y \in X$ dla $x \neq y$.

Rozważmy $\{x\}$.

Ponieważ F jest ultrafiltrem, więc:

$$\{x\} \in F \text{ albo } -\{x\} \in F.$$

W pierwszym przypadku $\{x\} \cap X \in F$, czyli $\{x\} \in F$, co daje sprzeczność.

W drugim przypadku sprzeczność otrzymujemy wobec faktu, że $X \setminus \{x\} \in F$.

($\Leftarrow$:)

Założmy, że $F = \{Y \subset I : \{a\} \subset Y\} = \{Y : a \in Y\}$.

Weźmy dowolny $Z \subset I$.

Mamy:

$$a \in Z \text{ lub } a \notin Z, \text{ czyli } a \in -Z.$$

W pierwszym przypadku $Z \in F$, a w drugim $-Z \in F$.

Wobec tego F jest ultrafiltrem.

Uwaga:

Jeśli F jest ultrafiltrem niegłównym nad I , to do F nie należy żaden zbiór skończony.

Dowód:

Założmy, że F jest filtrem niegłównym w pewnej algebrze potęgowej nad I i przypuśćmy, że pewien zbiór skończony należy do F .

Niech K będzie takim zbiorem o minimalnej liczbie elementów. Przypuśćmy ponadto, że dla $x \neq y$ mamy $x, y \in K$.

Wówczas

$$\{x\} \notin F,$$

ponieważ K był minimalnym zbiorem skończonym należącym do F oraz

$$-\{x\} \notin F,$$

ponieważ w przeciwnym razie $-\{x\} \cap K \in F$, co daje sprzeczność z minimalnością K .

Oznacza to, że F nie mógłby być ultrafiltrem.

Uwaga:

W dowolnej nieskończonej algebrze potęgowej istnieją ultrafiltry niegłówne.

Dowód:

Niech I będzie zbiorem nieskończonym.

Rozważmy

$$F = \{X \subset I : X \text{ jest zbiorem skończonym}\}.$$

Z łatwością sprawdzamy, że F jest filtrem.

F jest filtrem właściwym, bo $\emptyset \notin F$.

F możemy rozszerzyć do ultrafiltru.

Z kolei łatwo sprawdzamy, że każdy ultrafiltr rozszerzający F jest niegłówny.