

Algebrą nazywamy strukturę $\mathbf{A} = (A, \{F_i : i \in I\})$, gdzie A jest zbiorem zwanym **uniwersum algebry**, zaś $F_i : A^{\#F_i} \rightarrow A$ (symbol $\#F_i$ oznacza ilość argumentów funkcji F_i). W rozważanych przez nas algebrach I najczęściej będzie zbiorem skończonym. **Typem** (lub **sygnaturą**) algebry $\mathbf{A} = (A, \{F_i : i \in I\})$ nazywamy układ

$$\tau_{\mathbf{A}} = (\#F_i : i \in I).$$

Algebry $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są **podobne**, gdy $\tau_{\mathbf{A}} = \tau_{\mathbf{B}}$. Jeżeli $\sigma : I \rightarrow \mathbb{N}$ oraz $\tau : J \rightarrow \mathbb{N}$ spełniają warunki

1. $I \supset J$,
2. $\sigma(a) = \tau(a)$ dla $a \in J$,

to σ nazywamy **wzbogaceniem** typu τ , a τ **reduktem** typu σ .

Ważnym przykładem algebr, który będziemy bliżej studiować są monoidy. **Monoidem** nazywamy algebrę $\mathbf{M} = (M, +, 0)$ o typie $\tau_M = (2, 0)$, dla której spełnione są następujące aksjomaty:

1. $x + 0 = 0 + x = x$ dla wszelkich $x \in M$ (tzn. 0 jest elementem neutralnym $+$) oraz
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ dla wszelkich $x, y, z \in M$ (tzn. $+$ jest łączne).

Jeżeli ponadto spełniony jest warunek

$$x + y = y + x$$

dla wszelkich $x, y \in M$, to $\mathbf{M}$ nazywamy **monoidem przemennym** (lub **abelowym**).

Oznaczmy przez $\mathbb{K}(\tau)$ klasę wszystkich algebr typu τ . Niech $\mathbf{A} = (A, \{F_i : i \in I\})$ i $\mathbf{B} = (B, \{G_i : i \in I\})$ będą algebrami podobnymi. Mówimy, że $\mathbf{B}$ jest **podalgebrą** algebry $\mathbf{A}$ (oznaczamy $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$), gdy $B \subset A$ oraz dla każdego $i \in I$

$$G_i = F_i|_{B^{\#F_i}}$$

(symbol $|$ oznacza istotne zacieśnienie). Dalej, niech $X \subset B$. Mówimy, że X **generuje algebrę $\mathbf{B}$** , gdy $\mathbf{B}$ jest najmniejszą podalgebrą algebry $\mathbf{A}$ zawierającą uniwersum zawierające X .

Niech $\mathbf{A} = (A, \{F_i : i \in I\})$ i $\mathbf{B} = (B, \{G_i : i \in I\})$ będą algebrami podobnymi. Odwzorowanie $\phi : A \rightarrow B$ nazywamy **homomorfizmem** algebr $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$, co oznaczamy przez $\phi : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, gdy dla każdego $i \in I$ i dla dowolnych $a_1, \dots, a_n \in A$, gdzie $n = \#F_i$:

$$\phi(F_i(a_1, \dots, a_n)) = G_i(\phi(a_1), \dots, \phi(a_n)).$$

Monomorfizm jest to homomorfizm injektywny, **epimorfizm** to homomorfizm suriektywny, a **izomorfizm** to homomorfizm bijektywny.

Odtąd tam, gdzie jest to konieczne, milcząco zakładamy podobieństwo algebr $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$. Niech $\mathbb{K}$ oznacza klasę algebr podobnych. Spośród licznych konstrukcji na algebrach wyróżnimy trzy: algebry wolne, ilorazowe i produkty algebr. Mówimy, że $\mathbf{A}$ jest **algebrą wolną** $\mathbb{K}$ ze zbiorem wolnych generatorów X , gdy X generuje $\mathbf{A}$ oraz dla każdej algebry $\mathbf{B} \in \mathbb{K}$ i dowolnego odwzorowania $\phi : X \rightarrow B$ istnieje dokładnie jedno przedłużenie ϕ do homomorfizmu algebr $\tilde{\phi} : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$. Algebrę $\mathbf{B}$ nazywamy po prostu **wolną**, gdy jest algebrą wolną w klasie wszystkich algebr podobnych do $\mathbf{A}$.

Niech $\mathbf{A} = (A, \{F_i : i \in I\})$. **Kongruencją** algebry $\mathbf{A}$ nazywamy relację $R \subset A \times A$ taką, że

1. R jest relacją równoważności,
2. dla każdego $i \in I$ i dla dowolnych $a_1, \dots, a_n \in A$, gdzie $n = \#F_i$:

jeżeli $a_1 R b_1, \dots, a_n R b_n$, to $F_i(a_1, \dots, a_n) R G(b_1, \dots, b_n)$.

Niech $\mathbf{A} = (A, \{F_i : i \in I\})$ i niech R będzie kongruencją algebry $\mathbf{A}$. **Algebrą ilorazową** algebry $\mathbf{A}$ nazywamy algebrę

$$\mathbf{A}/R = (A/R, \{F_i^R : i \in I\}),$$

gdzie

$$F_i^R([a_1], \dots, [a_n]) = [F_i(a_1, \dots, a_n)],$$

dla każdego $i \in I$ i dla dowolnych $a_1, \dots, a_n \in A$, gdzie $n = \#F_i$. Epimorfizm $\kappa : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}/R$ dany wzorem

$$\kappa(a) = [a]$$

zwiemy **epimorfizmem kanonicznym**.

Na koniec niech $\{\mathbf{A}_t : t \in T\}$, przy czym $\mathbf{A}_t = (A_t, \{F_i^t : i \in I\})$,
 będzie rodziną algebr podobnych. **Produktem** tej rodziny
 nazywamy algebrę

$$\prod_{t \in T} \mathbf{A}_t = (\prod_{t \in T} A_t, \{G_i : i \in I\})$$

gdzie

$$G_i((a_t^1)_t, \dots, (a_t^n)_t) = (F_i^t(a_t^1, \dots, a_t^n))_t$$

dla dowolnych $i \in I$, $a_t^1, \dots, a_t^n$ i $n = \#F_i$.

Ważnym dla nas przykładem algebr są **algebry Boole'a**, czyli algebry $\mathbf{B} = (B, \cap, \cup, -, 0, 1)$ typu $(2, 2, 1, 0, 0)$ spełniające własności:

1. $x \cup y = y \cup x, x \cap y = y \cap x,$
2. $x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z, x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z,$
3. $x \cup (x \cap y) = x, x \cap (x \cup y) = x,$
4. $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z), x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z),$
5. $x \cup -x = 1, x \cap -x = 0$

Przykład 1:

Dwuelementowa algebra Boole'a $\mathbf{B}_2 = (\{0, 1\}, \cap, \cup, -, 0, 1)$, gdzie

- ▶ $x \cap y = \min\{x, y\}$,
- ▶ $x \cup y = \max\{x, y\}$,
- ▶ $-x = 1 - x \pmod{2}$.

Przykład 2:

Algebra potęgowa $\mathbf{P}(X) = (2^X, \cap, \cup, -, \emptyset, X)$, gdzie X jest niepustym zbiorem, a $\cap, \cup$ i $-$ są operacjami mnogościowymi w 2^X . Każda skończona algebra Boole'a jest izomorficzna z pewną algebrą potęgową.

Przykład 3:

Niech

$Z(X) = \{Y \subset X : Y \text{ jest skończony} \vee X \setminus Y \text{ jest skończony}\}.$

Wówczas $\mathbf{Z}(X) = (Z(X), \cap, \cup, -, \emptyset, X)$, gdzie X jest niepustym zbiorem, a $\cap, \cup$ i $-$ są operacjami mnogościowymi w $Z(X)$.

W szczególności, gdy X jest zbiorem przeliczalnym, to jest to przeliczalna algebra Boole'a.

Widzimy więc, że nie każda algebra Boole'a jest izomorficzna z algebrą potęgową.

Twierdzenie Stone'a:

Każda algebra Boole'a jest izomorficzna z pewną podalgebrą pewnej algebry potęgowej.

Stwierdzenie:

W dowolnej algebrze Boole'a zachodzą następujące związki:

1. $x \cup x = x, x \cap x = x$
2. $x \cup 0 = x, x \cap 1 = x$

Dowód:

$$(1) \ x \cap (x \cup x) = x.$$

$$\text{Ponadto } x \cup (x \cap (x \cup x)) = x,$$

$$\text{Stąd } x \cup x = x.$$

$$\text{Podobnie dowodzimy } x \cap x = x.$$

$$(2) \ x \cap -x = 0.$$

$$\text{Stąd } x \cup 0 = x \cup (x \cap -x) = x.$$

$$\text{Podobnie dowodzimy } x \cap 1 = x.$$

Stwierdzenie:

W dowolnej algebrze Boole'a mamy

$$x \cap y = x \Leftrightarrow x \cup y = y$$

Dowód:

$(\Rightarrow)$ Załóżmy, że $x \cap y = x$.

Wówczas $x \cup y = (x \cap y) \cup y = y$.

$(\Leftarrow)$ Załóżmy, że $x \cup y = y$.

Wówczas $x \cap y = x \cap (x \cup y) = x$.

W dowolnej algebrze Boole'a definiujemy relację

$$x \leq y \Leftrightarrow x \cap y = x \text{ (lub równoważnie } x \cup y = y \text{)}$$

Stwierdzenie:

Relacja $\leq$ jest porządkiem na uniwersum algebry **A**.

Dowód:

Relacja $\leq$ jest zwrotna: $x \cap x = x$, a zatem $x \leq x$.

Relacja $\leq$ jest antysymetryczna: założmy, że $x \leq y$ oraz $y \leq x$.

Wówczas $x \cap y = x$ oraz $y \cap x = x$.

Zatem $y = y \cap x = x \cap y = x$ i $y = x$.

Relacja $\leq$ jest przechodnia: założmy, że $x \leq y$ oraz $y \leq z$.

Wówczas $x \cap y = x$ oraz $y \cap z = y$.

Stąd $x \cap z = (x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z) = x \cap y = x$.

Stwierdzenie:

Każdy skończony podzbiór uniwersum algebry Boole'a ma kres w sensie $\leq$.

Dowód:

Wystarczy pokazać, że dowolne dwuelementowe podzbiory mają kresy, dalej dowód przebiega przez indukcję.

Ograniczymy się do pokazania, że zbiór $\{x, y\}$ ma kres dolny.

Dokładniej, pokażemy, że $x \cap y = \inf_{\leq} \{x, y\}$, czyli że

1. $x \cap y \leq x$ oraz $x \cap y \leq y$,
2. dla dowolnego a jeśli $a \leq x$ i $a \leq y$, to $a \leq x \cap y$.

Istotnie:

1. $(x \cap y) \cap x = (x \cap x) \cap y = x \cap y$, czyli $x \cap y \leq x$.
Podobnie sprawdzamy, że $x \cap y \leq y$.

2. Niech $a \leq x$ i $a \leq y$, czyli $a \cap x = a$ i $a \cap y = a$.
Wówczas

$$a \cap (x \cap y) = (a \cap x) \cap y = a \cap y = a,$$

czyli $a \leq x \cap y$.

Kratą nazywamy parę $(K, \leq)$, gdzie $K \neq \emptyset$ i $\leq$ jest porządkiem takim, że dowolny skończony podzbiór zbioru K ma kresy.

Tradycyjnie oznaczamy

$$\inf_{\leq} \{x, y\} = x \wedge y \text{ oraz } \sup_{\leq} \{x, y\} = x \vee y.$$

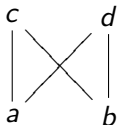
Przykład 1: $(2^X, \subset)$.

Przykład 2: $(\mathbb{N}, \leq)$.

Przykład 3: $(\mathbb{N}, |)$; tutaj mamy w szczególności
 $n \wedge m = NWD(n, m)$, $n \vee m = NWW(n, m)$.

Przykład 4:

Porządkiem, który nie jest kratowy, jest na przykład



Tutaj $\{a, b\}$ i $\{c, d\}$ są nieporównywalne, więc nie mają kresów. Obrazek ten wyjaśnia też nazwę “krata”.

Kratę $(K, \leq)$ nazywamy **dystybutywną** (lub **rozdzielczą**), jeśli dla dowolnych $x, y, z \in K$ mamy:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

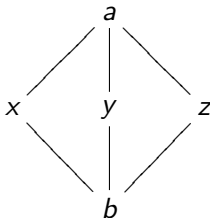
Przykład 1: $(2^X, \subset)$.

Przykład 2: $(\mathbb{N}, \leq)$.

Przykład 3: $(\mathbb{N}, |)$

Przykład 4:

Nie każda krata musi być dystrybutywna, na przykład następująca krata nie jest:



Przykład 5:

Stwierdzenie pokazuje, że każda algebra Boole'a jest kratą dystrybutywną.

Kratą komplementarną nazywamy kratę $(K, \leq)$ taką, że

1. w K istnieją element największy $\top$ i element najmniejszy $\perp$,
2. dla dowolnego $x \in K$ istnieje $y \in K$ taki, że

$$x \wedge y = \perp \text{ oraz } x \vee y = \top.$$

Element y nazywamy wówczas **dopełnieniem** elementu x .

Stwierdzenie:

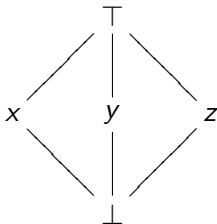
Niech **B** będzie algebrą Boole'a. Wówczas $(B, \leq)$ jest kratą dystrybutywną i komplementarną.

Dowód:

Dystrybutywność już udało nam się przedyskutować, pozostaje wykazać komplementarność.

1. Pokazaliśmy, że $x \cup 0 = x$ oraz $x \cap 1 = x$. W szczególności $x \cap 0 = (x \cup 0) \cap 0 = 0$, a zatem $0 \leq x$ oraz $x \leq 1$ dla $x \in K$, a więc 0 jest elementem najmniejszym, a 1 elementem największym.
2. Wobec ostatniego z aksjomatów algebry Boole'a: $x \cup -x = 1$ oraz $x \cap -x = 0$.

Przykład: W kracie komplementarnej, która nie jest dystrybutywna, nie każdy element musi mieć jednoznacznie wyznaczone dopełnienie, na przykład w “chińskiej latarni”:



Okazuje się, że faktycznie wystarczy założyć, aby krata była jednocześnie komplementarna i dystrybutywna, aby problem ten zniknął.

Stwierdzenie:

Niech $(K, \leq)$ będzie kratą dystrybutywną i komplementarną.
Wówczas każdy element tej kraty ma dokładnie jedno dopełnienie.

Dowód:

Przypuśćmy, że $x \wedge y' = \perp$, $x \wedge y'' = \perp$ oraz $x \vee y' = \top$,
 $x \vee y'' = \top$.

Wówczas

$$y' = y' \vee \perp = y' \vee (x \wedge y'') = (y' \vee x) \wedge (y' \vee y'') = \top \wedge (y' \vee y'') = y' \vee y''.$$

Zatem $y' = y' \vee y'' \Leftrightarrow y' \wedge y'' = y''$, czyli $y'' \leq y'$.

Ponadto

$$y'' = y'' \vee \perp = y'' \vee (x \wedge y') = (y'' \vee x) \wedge (y'' \vee y') = \top \wedge (y' \vee y'') = y' \vee y'',$$

zatem $y'' = y' \vee y'' \Leftrightarrow y' \wedge y'' = y'$, czyli $y' \leq y''$.

Tym samym $y' = y''$.

Twierdzenie:

Każda krata dystrybutywna i komplementarna spełnia aksjomaty algebry Boole'a, gdzie

- ▶ $\cup$ interpretujemy jako $\vee$,
- ▶ $\cap$ interpretujemy jako $\wedge$,
- ▶ $-$ interpretujemy jako operację tworzenia dopełnienia,
- ▶ 0 interpretujemy jako $\perp$,
- ▶ 1 interpretujemy jako $\top$.

Dowód:

Dowód jest w zasadzie trywialny – jedyna część, jaka wymaga komentarza to sprawdzenie drugiego aksjomatu, który jest spełniony bo

$$\inf\{x, \inf\{y, z\}\} = \inf\{\inf\{x, y\}, z\}.$$

Twierdzenie:

W dowolnej algebrze Boole'a spełnione są następujące związki:

1. $x \cap y = 0 \Leftrightarrow x \leq -y$, $x \cup y = 1 \Leftrightarrow -y \leq x$,
2. $x \cap -y = 0 \Leftrightarrow x \leq y$, $x \cup -y = 1 \Leftrightarrow y \leq x$,
3. $-(-x) = x$,
4. $-(x \cap y) = -x \cup -y$, $-(x \cup y) = -x \cap -y$,
5. $x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x$.

Dowód:

Pokażemy dla przykładu (3):

$$\begin{aligned} \neg(\neg x) &= \neg(\neg x) \cap 1 = \neg(\neg x) \cap (x \cup \neg x) \\ &= (\neg(\neg x) \cap x) \cup (\neg(\neg x) \cap \neg x) = \neg(\neg x) \cap x \end{aligned}$$

a więc $\neg(\neg x) \leq x$.

Podobnie

$$x = x \cap 1 = x \cap (\neg(\neg x) \cup \neg x) = (x \cap \neg(\neg x)) \cup (x \cap \neg x) = x \cap \neg(\neg x),$$

a więc $x \leq \neg(\neg x)$. Tym samym $\neg(\neg x) = x$.

Grafem skierowanym lub krótko **grafem** będziemy nazywać strukturę $G = (G_0, G_1, src, tgt)$, gdzie G_0 jest zbiorem **węzłów**, G_1 zbiorem **krawędzi**, a $src, tgt : G_1 \rightarrow G_0$ są funkcjami. Graf o skończonej liczbie węzłów i krawędzi nazywamy **grafem skończonym**.

Zapis

$$x \xrightarrow{f} y$$

oznacza $f \in G_1$, $x = src(f)$, $y = tgt(f)$.

Podgrafem G' grafu G nazywamy strukturę (G'_0, G'_1, src, tgt) taką, że

1. $G'_0 \subset G_0$,
2. $G'_1 \subset G_1$,
3. $src_{G'}(f) = src_G(f) \in G'_0$ dla każdej krawędzi $f \in G'_1$,
4. $tgt_{G'}(f) = tgt_G(f) \in G'_0$ dla każdej krawędzi $f \in G'_1$.

Podgrafy oznaczamy przez $G' \trianglelefteq G$.

Graf nazywamy **grafem prostym** gdy funkcja $(src, tgt) : G_1 \rightarrow G_0 \times G_0$ dana wzorem

$$(src, tgt)(f) = (src(f), tgt(f))$$

jest injekcją.

Oznacza to, że dwóch węzłów nie łączy “podwójna krawędź”.

Ścieżką skończoną w grafie G o długości n od $x \in G_0$ do $y \in G_0$ nazywamy ciąg krawędzi

$$x = x_0 \xrightarrow{f_1} x_2 \xrightarrow{f_2} x_3 \rightarrow \dots \xrightarrow{f_n} x_n = y$$

Dwa wężły są **połączone**, jeśli istnieje w grafie G ścieżka skończona od x do y lub od y do x .

Graf, w którym każde dwa wężły są połączone nazywamy **grafem spójnym**.

Ścieżkę, która zaczyna się i kończy w tym samym węźle nazywamy **cyklem**.

Jeżeli żadna ścieżka nie jest cyklem, to mówimy o grafie **acyklicznym**.

Dla wybranego wężła $x \in G_0$ oznaczamy:

$$x^+ = \{b \in G_0 \mid \text{istnieje krawędź } x \xrightarrow{f} b\},$$

$$x^- = \{a \in G_0 \mid \text{istnieje krawędź } a \xrightarrow{f} x\},$$

Drzewem nazywamy graf prosty, spójny i acykliczny oraz taki, że

1. istnieje dokładnie jeden węzeł k taki, że $k^- = \emptyset$, zwany **korzeniem**,
2. $|x^-| = 1$ dla każdego wężła innego od k .

Podgraf drzewa nazywamy **poddrzewem**.

Zbiór wszystkich poddrzew drzewa D oznaczamy przez $\text{sub}(D)$.

Zbiór wszystkich ścieżek od korzenia oznaczamy przez $\text{adr}(D)$.

Zauważmy, że zbiory $\text{sub}(D)$ i $\text{adr}(D)$ można utożsamiać;
poddrzewo odpowiadające ścieżce s oznaczać będziemy przez D/s .
Węzły dla których $x^+ = \emptyset$ nazywać będziemy **liśćmi**.

Tradycyjnie przez $[]$ oznaczać będziemy drzewo puste, przez $[x]$ drzewo złożone tylko z jednego wężła x oraz przez $[x|T_1; \dots; T_n]$ drzewo z korzeniem x i poddrzewami $T_1, \dots, T_n$.

Ponadto przez Trees_ω oznaczamy klasę wszystkich drzew przeliczalnych.

W tych oznaczeniach przyjmujemy definicję **wysokości** drzewa jako funkcji $h : \text{Trees}_\omega \rightarrow \mathbb{N}$ określonej rekurencyjnie jako

$$h(T) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } T = [], \\ 1, & \text{gdy } T = [x], \\ 1 + \max\{h(T_i) : 1 \leq i \leq n\}, & \text{gdy } T = [x|T_1; \dots; T_n]. \end{cases}$$

Zdefiniujemy jeszcze **zbiór okurencji** drzewa T' w T jako zbiór ścieżek

$$\omega(T', T) = \{s \in \text{adr}(T) \mid T' = T/s\}.$$