

## Zestaw zadań 7: Przestrzenie wektorowe.<sup>1</sup>

- (1) Wykazać, że  $V = \mathbb{C}$  ze zwykłym dodawaniem jako dodawaniem wektorów i operacją mnożenia przez skalar

$$\begin{aligned} * & : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \\ (z, v) & \mapsto z * v := \bar{z} \cdot v \end{aligned}$$

jest przestrzenią liniową nad ciałem liczb zespolonych  $\mathbb{C}$ .

- (2) Niech  $V$  będzie zbiorem liczb rzeczywistych dodatnich, a dodawanie wektorów niech będzie mnożeniem liczb. Operację mnożenia przez liczby rzeczywiste określmy następująco:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times V & \rightarrow V, \\ (a, v) & \mapsto v^a \end{aligned}$$

Wykazać, że wyżej opisana struktura algebraiczna jest przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$ .

- (3) Niech  $K$  będzie dowolnym ciałem oraz niech  $V = K^\infty$  (zbiór wszystkich nieskończonych ciągów elementów ciała  $K$ ). Określmy działania dodawania wektorów oraz mnożenia wektorów przez skalary z ciała  $K$  następująco:

$$\begin{aligned} [a_1, a_2, \dots] + [b_1, b_2, \dots] & : = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots], \\ a \cdot [a_1, a_2, \dots] & : = [aa_1, aa_2, \dots]. \end{aligned}$$

Pokazać, że wyżej zdefiniowana struktura algebraiczna jest przestrzenią wektorową nad ciałem  $K$ .

- (4) Niech  $A$  będzie niepustym zbiorem oraz niech  $K$  będzie dowolnym ciałem. Oznaczmy symbolem  $K^A$  zbiór wszystkich funkcji  $A \rightarrow K$ . Sumą funkcji  $f : A \rightarrow K$  oraz funkcji  $g : A \rightarrow K$  nazywamy funkcję  $f + g : A \rightarrow K$  taką, że  $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$  dla każdego  $a \in A$ . Iloczynem funkcji  $f : A \rightarrow K$  przez skalar  $x$  z ciała  $K$  nazywamy funkcję  $xf : A \rightarrow K$  taką, że  $(xf)(a) = xf(a)$  dla każdego  $a \in A$ . Pokazać, że tak zdefiniowana struktura algebraiczna jest przestrzenią liniową nad ciałem  $K$ .
- (5) Oznaczmy symbolem  $K[X]$  zbiór wszystkich wielomianów zmiennej  $X$  o współczynnikach z ciała  $K$ . Sprawdzić, że z działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianu przez elementy ciała  $K$ , zbiór  $K[X]$  jest przestrzenią wektorową nad ciałem  $K$ .
- (6) Oznaczmy symbolem  $K(X)$  zbiór wszystkich funkcji wymiernych zmiennej  $X$  o współczynnikach z ciała  $K$ . Sprawdzić, że z działaniami dodawania funkcji wymiernych i mnożenia funkcji wymiernej przez element ciała  $K$  zbiór  $K(X)$  jest przestrzenią wektorów nad ciałem  $K$ .
- (7) *Macierzą*<sup>2</sup> o  $m$  wierszach i  $n$  kolumnach nad ciałem  $K$  nazywamy układ (prostokątną tabliczkę)  $mn$  elementów ciała  $K$  (które nazywamy *elementami* albo *współczynnikami* macierzy) ułożonych w  $m$  wierszach i w  $n$  kolumnach. Element macierzy oznaczamy podając numer wiersza i numer kolumny, w których się on znajduje. W macierzach zmiennych na ogół elementy oznaczamy tą samą literą z numerem wiersza i numerem kolumny jako indeksami. Macierze zapisujemy w

<sup>1</sup>Pojęcie przestrzeni wektorowej (przestrzeni liniowej) aksjomatycznie zdefiniował Hermann Günter Grassmann (5 IV 1809, Szczecin - 26 IX 1916, Szczecin), jako podsumowanie doświadczeń matematyków przynajmniej od czasów Gaussa.

<sup>2</sup>Pojęcie macierzy wprowadzili angielscy matematycy: William Rowan Hamilton (1805 - 1865), Arthur Cayley (1821 - 1895) i John J. Sylvester (1814 - 1897) w latach 40-tych XIX w.

nawiasie kwadratowym. Na przykład dla  $n = m = 2$  równość

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

oznacza, że  $a_{11} = 1$ ,  $a_{12} = 2$ ,  $a_{21} = 3$ ,  $a_{22} = 4$ . Zbiór wszystkich macierzy o  $m$  wierszach i  $n$  kolumnach nad ciałem  $K$  oznaczamy symbolem  $K_n^m$ .

Sumą macierzy  $A = [a_{ij}]$  i macierzy  $B = [b_{ij}]$  nazywamy macierz  $A + B$  taką, że  $A + B = [c_{ij}]$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych  $i, j$  zachodzi równość  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ . Iloczynem macierzy  $A = [a_{ij}]$  przez element  $a$  ciała  $K$  nazywamy macierz  $aA$  tak, że  $aA = [c_{ij}]$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych  $i, j$  zachodzi równość  $c_{ij} = aa_{ij}$ . Wykazać, że  $K_n^m$  z działaniami dodawania macierzy i mnożenia macierzy przez element ciała  $K$  jest przestrzenią wektorową nad  $K$ .

- (8) Macierz  $S = [s_{ij}] \in K_n^n$  nazywamy **macierzą symetryczną**, gdy jej elementy  $s_{ij}$  spełniają warunki:  $s_{ij} = s_{ji}$  dla każdych  $i, j$ . Macierz  $A = [a_{ij}] \in K_n^n$  nazywamy **macierzą antysymetryczną**, gdy jej elementy  $a_{ij}$  spełniają warunki:  $a_{ij} = -a_{ji}$  dla każdych  $i, j$ . Sprawdzić, że każdy ze zbiorów: zbiór  $S_n$  wszystkich macierzy symetrycznych należących do  $K_n^n$  i zbiór  $A_n$  wszystkich macierzy antysymetrycznych należących do  $K_n^n$ , z działaniami dodawania macierzy i mnożenia macierzy przez skalar, jest przestrzenią wektorów nad ciałem  $K$ .
- (9) Niech  $A$  będzie dowolnym zbiorem, a  $P(A)$  niech będzie zbiorem wszystkich jego podzbiorów. Działanie dodawania w zbiorze  $P(A)$  definiujemy następująco:  $B \div C = (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$ . Mnożenie elementów  $P(A)$  przez elementy ciała  $\mathbb{Z}_2$  definiujemy w oczywisty sposób:  $0 \cdot B = \emptyset$ ,  $1 \cdot B = B$ . Sprawdzenie łączności działania  $\div$  jest dość kłopotliwe.
- (a) Zakładając, że działanie  $\div$  jest łączne, sprawdzić, że spełnione są również pozostałe aksjomaty przestrzeni liniowej.
- (b) Wykazać łączność działania  $\div$ .
- (10) Jaki warunek musi spełniać dodawanie w grupie addytywnej  $A$ , żeby mnożenie elementów tej grupy przez elementy ciała  $\mathbb{Z}_2$  zdefiniowane następująco:  $0 \cdot a = 0$ ,  $1 \cdot a = a$  było rozdzielne względem dodawania?
- (11) Niech  $V = \mathbb{C}^4$ ,  $U = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in V : z_1 = z_2 = 0\}$ . Wektory dodawać będziemy w zwykły sposób natomiast mnożenie przez skalary definiujemy na cztery różne sposoby:
- $z\alpha = \theta$  dla  $z \in \mathbb{C}$  oraz  $\alpha \in V$ .
  - $z\alpha = \alpha$  dla  $z \in \mathbb{C}$  oraz  $\alpha \in V$ .
  - $z\alpha = (\operatorname{Re} z)\alpha$  dla  $z \in \mathbb{C}$  oraz  $\alpha \in V$ .
  - $z\alpha = \begin{cases} z\alpha & \text{gdy } z \in \mathbb{C} \text{ i } \alpha \in U \\ \bar{z}\alpha & \text{gdy } z \in \mathbb{C} \text{ i } \alpha \notin U \end{cases}$ .
- Sprawdzić, że w każdym z czterech powyższych przykładów dokładnie jeden z aksjomatów przestrzeni liniowej nie jest spełniony.
- Jaki wniosek związany z wzajemną zależnością aksjomatów przestrzeni liniowej można wyciągnąć z tego zadania?
- (12) Wykazać, że przemienność dodawania wynika z pozostałych aksjomatów przestrzeni wektorowej.