

Zestaw zadań 6: Wyznaczniki.¹

(1) Obliczyć wyznaczniki następujących macierzy:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad (b) \begin{bmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad (c) \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (d) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$

$$(e) \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}, \quad (f) \begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & 1 \\ \sin \beta & \cos \beta & 1 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 1 \end{bmatrix} \quad \text{gdzie } \alpha, \beta, \gamma \text{ są} \\ \text{miarami kątów trójkąta,}$$

$$(g) \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie } \varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (h) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie } \varepsilon = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3},$$

$$(i) \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -r \sin \alpha \cos \beta & -r \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta & r \cos \alpha \cos \beta & -r \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \beta & 0 & r \cos \beta \end{bmatrix}.$$

(2) Obliczyć następujące wyznaczniki (nad $\mathbb{R}$):

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix}, \quad (b) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -8 & -13 \end{vmatrix}, \quad (c) \begin{vmatrix} 7 & 6 & 9 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 4 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{vmatrix},$$

$$(d) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (e) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (f) \begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 & 0 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 6 & 6 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix},$$

$$(g) \begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix}, \quad (h) \begin{vmatrix} 30 & 20 & 15 & 12 \\ 20 & 15 & 12 & 15 \\ 15 & 12 & 15 & 20 \\ 12 & 15 & 20 & 30 \end{vmatrix}, \quad (i) \begin{vmatrix} 5 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & -7 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$(j) \begin{vmatrix} 1 & 6 & 20 & 50 & 140 & 140 \\ 0 & -16 & -70 & -195 & -560 & -560 \\ 0 & 26 & 125 & 366 & 1064 & 1064 \\ 0 & -31 & -154 & -460 & -1344 & -1344 \\ 0 & 4 & 20 & 60 & 176 & 175 \\ 0 & 4 & 20 & 60 & 175 & 176 \end{vmatrix}, \quad (k) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

¹Wyznaczniki odkrył po raz pierwszy G. W. Leibniz w 1693 r. W 1750 odkrył je powtórnie Szwajcar Gabriel Cramer (nie mylić ze współczesnym matematykiem szwedzkim Carlem Haraldem Cramerem). Nazwę "wyznacznik" ("determinant") wprowadził w 1815 r. A. Cauchy. Dwie pionowe kreski jako symbol wyznacznika wprowadził w 1841 r. A. Cayley.

(3) Obliczyć:

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_7, \quad (b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 8 & 10 \end{vmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_{11}, \quad (c) \begin{vmatrix} 7 & 6 & 11 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 1 & 6 \\ 1 & 10 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & 0 & 9 & 2 & 2 \end{vmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_{13}.$$

(4) Obliczyć wyznaczniki następujących macierzy stopnia n :

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (b) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (c) \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$(d) \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{bmatrix}, \quad (e) \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & a & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & a \end{bmatrix},$$

$$(f) \begin{bmatrix} 1 & n & n & \cdots & n & n \\ n & 2 & n & \cdots & n & n \\ n & n & 3 & \cdots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n-1 & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{bmatrix}, \quad (g) \begin{bmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

(5) Niech $A = [a_{ij}]$, $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, będzie macierzą kwadratową stopnia n . Pokazać, że $\det A$ jest liczbą całkowitą. Załóżmy dodatkowo, że $a_{ij} = \pm k$, gdzie k jest ustaloną liczbą całkowitą. Pokazać, że $2^{n-1}k^n$ dzieli $\det A$.

(6) Pokazać, że jeśli A jest macierzą antysymetryczną (tzn. $A^T = -A$) stopnia nieparzystego nad $\mathbb{R}$, to jest ona osobliwa, czyli $\det A = 0$.

(7) Liczby 20604, 53227, 25755, 20927 i 289 dzielą się przez 17. Pokazać (bez obliczania), że wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 9 \end{vmatrix} \text{ również dzieli się przez 17.}$$

(8) Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia n . Jak zmieni się wyznacznik macierzy A , jeżeli:

- każdy element a_{ij} pomnożymy przez c^{i-j} (c ustalone),
- obrócimy macierz A o 90° wokół jej "środka" (zgodnie z ruchem wskazówek zegara),
- zapiszemy wiersze (kolumny) macierzy A w odwrotnej kolejności,
- do każdej kolumny (wiersza) poczynając od drugiej (drugiego) dodamy poprzednią kolumnę (poprzedni wiersz),

(e) do każdej kolumny (wiersza) poczynając od drugiej (drugiego) dodamy poprzednią kolumnę (poprzedni wiersz), a pierwszej kolumny (do pierwszego wiersza) dodamy starą ostatnią kolumnę (stary ostatni wiersz),

(f) do każdej kolumny (wiersza) poczynając od drugiej (drugiego) dodamy wszystkie poprzednie kolumny (poprzednie wiersze).

- (9) Znaleźć największą wartość wyznacznika macierzy kwadratowej stopnia 3, której elementy są liczbami całkowitymi równymi
(a) 0 lub 1, (b) -1 lub 1.

- (10) Przeanalizować Przykład 6.7 ze stron 158-159 z książki A.Białynickiego-Biruli (dowód wzoru na wyznacznik macierzy klatkowo-trójkątnej $\det \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline D & B \end{array} \right] = \det A \det B$ przez indukcję względem stopnia klatki B).

- (11) Sprawdzić tożsamości:

$$(a) \begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{vmatrix} = \frac{1}{a} \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \\ a & b \\ i & j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & c \\ e & g \\ a & c \\ i & k \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \\ a & b \\ i & j \\ a & b \\ m & n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & c \\ e & g \\ a & c \\ i & k \\ a & c \\ m & o \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & d \\ e & h \\ a & d \\ i & l \\ a & d \\ m & p \end{vmatrix}$$

(c) Sformułować i udowodnić ogólne twierdzenie.

- (12) Sprawdzić, że następująca równość jest tożsamością:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \\ a & b \\ i & f \\ a & b \\ m & n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & c \\ e & g \\ a & c \\ i & k \\ a & c \\ m & o \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & d \\ e & h \\ a & d \\ i & l \\ a & d \\ m & p \end{vmatrix} + (f - j) \begin{vmatrix} a & c & d \\ e & g & h \\ m & o & p \end{vmatrix}$$

- (13) Zbadać rozwiązalność układu równań

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ 3x - y + 2z = 10 \\ 2x + 7y - 3z = 8 \\ ax - by + cz = 20 \\ ax + by + cz = 44 \\ 10ax + 3by - cz = 26 \end{cases}$$

w zależności od parametrów a, b, c .

- (14) Obliczyć wyznacznik macierzy

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 5 & 3 & 1 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 5 & 3 & 1 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$

$$(b) B = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{bmatrix}.$$

Wskazówka. Obliczyć wyznaczniki macierzy A^2 oraz BB^T .

- (15) Niech $x_1, x_2, \dots, x_n$ będą wszystkimi pierwiastkami wielomianu $f(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_{n-1}X + a_n$. Sumy k -tych potęg pierwiastków

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k$$

są funkcjami symetrycznymi, więc wyrażają się przez współczynniki wielomianu (np. $s_0 = n$; z wzorów Viète² wynikają równości $s_1 = -\frac{a_1}{a_0}$, $s_2 = s_1^2 - 2 \sum_{i < j} x_i x_j = \frac{a_1^2}{a_0^2} - 2\frac{a_2}{a_0}$ itd.)

Obliczyć wyznacznik D macierzy

$$\begin{bmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{bmatrix}.$$

(*Wskazówka:* obliczyć najpierw $V^T V$, gdzie $V = V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ jest macierzą Vandermonde'a pierwiastków).

Wyrazić wynik przez współczynniki wielomianu $f(X)$ gdy $n = 2$ i $f(X) = aX^2 + bX + c$ i gdy $n = 3$, a $f(X) = X^3 + pX + q$.

Wartość $\Delta = a_0^{2n-2} D$ nazywamy *wyróżnikiem wielomianu* $f(X)$ ³

- (16) Sprawdzić, czy następujące macierze są odwracalne oraz w przypadku pozytywnej odpowiedzi obliczyć macierz odwrotną:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, (b) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, (c) \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, (d) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(e) \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (17) Jeśli $A \in K_n^n$, $B \in K_m^m$, $C \in K_n^m$, $D \in K_m^n$, i $\det A \neq 0$ to

$$(a) \text{ obliczyć } \left[\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline -CA^{-1} & I_m \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} A & D \\ \hline C & B \end{array} \right];$$

$$(b) \text{ wykazać, że } \det \left[\begin{array}{c|c} A & D \\ \hline C & B \end{array} \right] = \det A \cdot \det(B - CA^{-1}D);$$

(c) podzielić na klatki 2×2 macierz z przykładu (d) z poprzedniego zadania; porównać jej wyznacznik z wartością wyrażenia $\det A \det B - \det C \det D$.

²François Viète (1540-1603) - matematyk francuski, zwany "ojcem algebry". Usystematyzował osiągnięcia algebraiczne Odrodzenia. Wprowadził oznaczenia literowe nie tylko dla niewiadomych, ale i dla danych, np. współczynników równań, dzięki czemu pojawiły się wzory matematyczne.

³Nazwa "wyróżnik" ("discriminant", od łacińskiego *discriminans*, od *discriminantis* - rozdzielający, odróżniający) pochodzi od J. Sylwestera.

(18) Rozwiązać następujące równania macierzowe:

(a) $X \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$

(b) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$

(c) $X \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix},$

(d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$

(19) Rozwiązać układy równań macierzowych:

(a) $\begin{cases} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \end{cases},$

(b) $\begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \end{cases}.$

(20) Obliczyć $(I + aE_{ir})^{-1}$, $i \neq r$.

(21) Wiadomo, że macierz odwracalną można "sprowadzić" do macierzy jednostkowej za pomocą przekształceń elementarnych na wierszach. Pokazać, że wykonując te same przekształcenia (w tej samej kolejności!) na macierzy jednostkowej otrzymamy macierz odwrotną do wyjściowej macierzy. Stosując tę metodę obliczyć jeszcze raz macierze odwrotne do macierzy z poprzednich zadań oraz następujących macierzy:

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix},$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}.$

(22) (a) Pokazać, że jeżeli $A^2 = 0$, to macierz $I_n + A$ jest odwracalna i $(I_n + A)^{-1} = I_n - A$.

(b) Pokazać, że jeżeli $A^m = 0$, to macierz $I_n + A$ jest odwracalna i znaleźć $(I_n + A)^{-1}$.

(23) Znaleźć kolejne potęgi macierzy $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ i wykorzystać je do obliczenia macierzy

odwrotnej do macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(24) Pokazać, że dla $A, B \in K_n^n$ jeżeli macierz $I_n + AB$ jest odwracalna, to również macierz $I_n + BA$ jest odwracalna (lemat Vassersteina ⁴) Wskazówka: Obliczyć $(I_n + BA)(I_n - B(I_n + AB)^{-1}A)$.

(25) Obliczyć macierze odwrotne do macierzy klatkowych: $\left[\begin{array}{c|c} A & D \\ \hline 0 & B \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & B \end{array} \right]$. Obliczyć macierze

odwrotne do następujących macierzy: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(26) Komutatorem $[A, B]$ macierzy nieosobliwych $A, B \in GL_n(K)$ nazywamy macierz $[A, B] = ABA^{-1}B^{-1}$. Wykazać, że

$$[I + aE_{ij}, I + bE_{kl}] = \begin{cases} I & \text{dla } j \neq k \text{ i } i \neq l \\ I + abE_{il} & \text{dla } j = k \text{ i } i \neq l \\ I - abE_{kj} & \text{dla } j \neq k \text{ i } i = l \end{cases}.$$

(27) Obliczyć wyznacznik nad ciałem $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych:

a) $\begin{vmatrix} 49 & 119 & 133 & 323 \\ 35 & 84 & 95 & 228 \\ 20 & 48 & 55 & 132 \\ 28 & 68 & 77 & 187 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 171 & 722 & 63 & 266 \\ 76 & 323 & 28 & 119 \\ 99 & 418 & 36 & 152 \\ 44 & 187 & 16 & 68 \end{vmatrix}$,

c) $\begin{vmatrix} 153 & 646 & 63 & 266 \\ 68 & 289 & 28 & 119 \\ 108 & 456 & 45 & 190 \\ 48 & 204 & 20 & 85 \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} 323 & 119 & 133 & 49 \\ 187 & 68 & 77 & 28 \\ 228 & 84 & 95 & 35 \\ 132 & 48 & 55 & 20 \end{vmatrix}$.

(28) Wyznaczyć liczby rzeczywiste a spełniające równość:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3-a & 1-a \\ -1 & 1-a & 4-2a \end{vmatrix} = 0$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6-a & 6-3a \\ 0 & 6-3a & 19-10a \end{vmatrix} = 0$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3-a & 3-2a \\ -1 & 3-2a & 5-2a \end{vmatrix} = 0$; d) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 11-a & 4-2a \\ 0 & 4-2a & 1-a \end{vmatrix} = 0$.

(29) Obliczyć wyznaczniki:

⁴L. N. Vasserstein, współczesny matematyk radziecki (do lat siedemdziesiątych) i amerykański (od lat osiemdziesiątych).

$$a) \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 & \cdots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & b & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ b & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix};$$

$$b) \left| \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & A \end{array} \right|, \text{ gdzie } A = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_1 & b_1 & b_2 & b_2 & b_2 & b_2 & b_2 & b_2 \\ b_1 & b_0 & b_2 & b_2 & b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_3 & b_2 \\ b_1 & b_2 & b_0 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 & b_2 & b_1 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_2 & b_0 & b_2 & b_3 & b_1 & b_3 & b_2 & b_1 \\ b_2 & b_1 & b_3 & b_2 & b_0 & b_3 & b_3 & b_2 & b_4 & b_1 \\ b_2 & b_2 & b_1 & b_3 & b_3 & b_0 & b_3 & b_1 & b_2 & b_4 \\ b_2 & b_3 & b_2 & b_1 & b_3 & b_3 & b_0 & b_4 & b_1 & b_2 \\ b_2 & b_1 & b_2 & b_3 & b_2 & b_1 & b_4 & b_0 & b_3 & b_3 \\ b_2 & b_3 & b_1 & b_2 & b_4 & b_2 & b_1 & b_3 & b_0 & b_3 \\ b_2 & b_2 & b_3 & b_1 & b_1 & b_4 & b_2 & b_3 & b_3 & b_0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} b_5 & b_4 & b_4 & b_4 & b_3 & b_3 & b_3 & b_3 & b_3 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_3 & b_3 & b_4 & b_3 & b_2 & b_4 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_3 & b_5 & b_3 & b_2 & b_4 & b_3 & b_3 & b_4 & b_2 \\ b_4 & b_3 & b_3 & b_5 & b_3 & b_2 & b_4 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_3 & b_4 & b_2 & b_3 & b_5 & b_2 & b_2 & b_3 & b_1 & b_4 \\ b_3 & b_3 & b_4 & b_2 & b_2 & b_5 & b_2 & b_4 & b_3 & b_1 \\ b_3 & b_2 & b_3 & b_4 & b_2 & b_2 & b_5 & b_1 & b_4 & b_3 \\ b_3 & b_4 & b_3 & b_2 & b_3 & b_4 & b_1 & b_5 & b_2 & b_2 \\ b_3 & b_2 & b_4 & b_3 & b_1 & b_3 & b_4 & b_2 & b_5 & b_2 \\ b_3 & b_3 & b_2 & b_4 & b_4 & b_1 & b_3 & b_2 & b_2 & b_5 \end{bmatrix};$$

$$c) \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ c & a & b & \cdots & b & b \\ c & c & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a & b \\ c & c & c & \cdots & c & a \end{vmatrix}.$$

$$d) \left| \begin{array}{cccccc} x_1 - y_1 & x_2 - y_1 & x_3 - y_1 & \cdots & x_{n-1} - y_1 & x_n - y_1 & 1 \\ x_1 - y_2 & x_2 - y_2 & x_3 - y_2 & \cdots & x_{n-1} - y_2 & x_n - y_2 & 1 \\ x_1 - y_3 & x_2 - y_3 & x_3 - y_3 & \cdots & x_{n-1} - y_3 & x_n - y_3 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 - y_{n-1} & x_2 - y_{n-1} & x_3 - y_{n-1} & \cdots & x_{n-1} - y_{n-1} & x_n - y_{n-1} & 1 \\ x_1 - y_n & x_2 - y_n & x_3 - y_n & \cdots & x_{n-1} - y_n & x_n - y_n & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| i$$

$$\left| \begin{array}{cccccc} x_1 - y_1 & x_2 - y_1 & x_3 - y_1 & \cdots & x_{n-1} - y_1 & x_n - y_1 \\ x_1 - y_2 & x_2 - y_2 & x_3 - y_2 & \cdots & x_{n-1} - y_2 & x_n - y_2 \\ x_n - y_3 & x_2 - y_3 & x_3 - y_3 & \cdots & x_{n-1} - y_3 & x_n - y_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n - y_{n-1} & x_2 - y_{n-1} & x_3 - y_{n-1} & \cdots & x_{n-1} - y_{n-1} & x_n - y_{n-1} \\ x_n - y_n & x_2 - y_n & x_3 - y_n & \cdots & x_{n-1} - y_n & x_n - y_n \end{array} \right|.$$

(30) Rozwiązać za pomocą wzorów Cramera następujące układy równań:

$$\begin{aligned} a) \begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}, \quad b) \begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}, \quad c) \begin{cases} x + y + 4z = 31 \\ 5x + y + 2z = 29 \\ 3x - y + z = 10 \end{cases}, \\ d) \begin{cases} x + y + 2z + 3t = 1 \\ 3x - y - z - 2t = -4 \\ 2x + 3y - z - t = -6 \\ x + 2y + 3z - t = -4 \end{cases}, \quad e) \begin{cases} y - 3z + 4t = -5 \\ x - 2z + 3t = -4 \\ 3x + 2y - 5z = 12 \\ 4x + 3y - 5z = 5 \end{cases}. \end{aligned}$$

(31) Rozwiązać układy równań z zestawu *Układy równań liniowych* przy użyciu wyznaczników.

(32) Wyznacznikiem Vandermonde'a⁵ (stopnia n nad ciałem K) nazywamy wyznacznik postaci

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

a) Obliczyć wartość wyznacznika Vandermonde'a.

(*Rozwiązanie:* Wyprowadzimy najpierw wzór rekurencyjny. Postępujemy następująco: od n -tej kolumny odejmujemy $(n-1)$ -szą pomnożoną przez x_n , od $(n-1)$ -szej kolumny odejmujemy $(n-2)$ -gą pomnożoną przez x_n , od drugiej kolumny odejmujemy pierwszą pomnożoną przez x_n . Jako wynik otrzymujemy równość

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_n & x_1(x_1 - x_n) & \cdots & x_1^{n-2}(x_1 - x_n) \\ 1 & x_2 - x_n & x_2(x_2 - x_n) & \cdots & x_2^{n-2}(x_2 - x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} - x_n & x_{n-1}(x_{n-1} - x_n) & \cdots & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1} - x_n) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

⁵Vandermonde, Alexandre Thèophil (28 II 1735 Paryż - 1 I 1796 Paryż) - matematyk francuski. Zajmował się teorią funkcji symetrycznych; uporządkował teorię wyznaczników.

Po rozwinięciu względem ostatniego wiersza oraz wyłączeniu z każdego wiersza odpowiedniego czynnika przed wyznacznik otrzymujemy w wyniku

$$\begin{aligned} V_n(x_1, \dots, x_n) &= (-1)^{n+1} (x_1 - x_n) \cdots (x_{n-1} - x_n) V_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ &= (x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1}) V_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}). \end{aligned}$$

Prosty dowód indukcyjny daje w rezultacie wzór $V_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k>l} (x_k - x_l)$.

b) Wykazać, że $V_n(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie $x_1, \dots, x_n$ są parami różne.

c) Niech $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in K$ oraz niech $x_1, \dots, x_n$ będą parami różne. Pokazać, że istnieje dokładnie jeden wielomian $w(X) \in K[X]$ o współczynnikach z ciała K stopnia $< n$ taki, że $w(x_i) = y_i$ dla $i = 1, \dots, n$. *Wskazówka.* Wykorzystać twierdzenie Cramera.

d) Znaleźć wielomian $w(X) \in \mathbb{R}[X]$ stopnia < 3 taki, że $w(1) = 2$, $w(-1) = 3$, $w(2) = 1$.