

Zestaw zadań 4: Układy równań liniowych.

(1) Rozwiązać nad ciałem $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych następujące układy równań:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \begin{cases} 2x - 3y + 5z + 7t = 1 \\ 4x - 6y + 2z + 3t = 2 \\ 2x - 3y - 11z - 15t = 1 \end{cases} ; \quad \text{(b)} \begin{cases} 2x + 5y - 8z = 8 \\ 4x + 3y - 9z = 9 \\ 2x + 3y - 5z = 7 \\ x + 8y - 7z = 12 \end{cases} ; \\
 & \text{(c)} \begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 6x + 8y + 2z + 5t = 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 13 \end{cases} ; \quad \text{(d)} \begin{cases} 3x - 5y + 2z + 4t = 2 \\ 7x - 4y + z + 3t = 5 \\ 5x + 7y - 4z - 6t = 3 \end{cases} ; \\
 & \text{(e)} \begin{cases} 3x - 2y + 5z + 4t = 2 \\ 6x - 4y + 4z + 3t = 3 \\ 9x - 6y + 3z + 2t = 4 \end{cases} ; \quad \text{(f)} \begin{cases} 8x + 6y + 5z + 2t = 21 \\ 3x + 3y + 2z + t = 10 \\ 4x + 2y + 3z + t = 8 \\ 3x + 5y + z + t = 15 \\ 7x + 4y + 5z + 2t = 18 \end{cases} ; \\
 & \text{(g)} \begin{cases} x + y + 3z - 2t + 3w = 1 \\ 2x + 2y + 4z - t + 3w = 2 \\ 3x + 3y + 5z - 2t + 3w = 1 \\ 2x + 2y + 8z - 3t + 9w = 2 \end{cases} ; \quad \text{(h)} \begin{cases} 2x - y + z + 2t + 3w = 2 \\ 6x - 3y + 2z + 4t + 5w = 3 \\ 6x - 3y + 2z + 8t + 13w = 9 \\ 4x - 2y + z + t + 2w = 1 \end{cases} ; \\
 & \text{(i)} \begin{cases} 6x + 4y + 5z + 2t + 3w = 1 \\ 3x + 2y + 4z + t + 2w = 3 \\ 3x + 2y - 2z + t = -7 \\ 9x + 6y + z + 3t + 2w = 2 \end{cases} .
 \end{aligned}$$

(2) Następujące układy rozwiązać nad $\mathbb{Q}$ oraz nad $\mathbb{Z}_p$:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \begin{cases} 2x + 7y + 3z + t = 6 \\ 3x + 5y + 2z + 2t = 4 \\ 9x + 4y + z + 7t = 2 \end{cases} , p = 11; \quad \text{(b)} \begin{cases} 9x - 3y + 5z + 6t = 4 \\ 9x - 3y + 5z + 6t = 4 \\ 3x - y + 3z + 14t = -8 \end{cases} , p = 13; \\
 & \text{(c)} \begin{cases} 6x + 3y + 2z + 3t + 4w = 5 \\ 4x + 2y + z + 2t + w = 4 \\ 4x + 2y + 3z + 2t + w = 0 \\ 2x + y + 7z + 3t + 2w = 1 \end{cases} , p = 11 \quad \text{(d)} \begin{cases} 2x - y + 3z - 7t = 5 \\ 6x - 3y + z - 4t = 7 \\ 4x - 2y + 14z - 31t = 18 \end{cases} , p = 37 \\
 & \text{(e)} \begin{cases} x + 2y + 3z - 2t + w = 4 \\ 3x + 6y + 5z - 4t + 3w = 5 \\ x + 2y + 7z - 4t + w = 11 \\ 2x + 4y + 2z - 3t + 3w = 6 \end{cases} , p = 13 \quad \text{(f)} \begin{cases} 3x + 2y + 2z + 2t = 2 \\ 2x + 3y + 2z + 5t = 3 \\ 9x + y + 4z - 5t = 1 \\ 2x + 2y + 3z + 4t = 5 \\ 7x + y + 6z - t = 7 \end{cases} , p = 7 \\
 & \text{(g)} \begin{cases} 2x + 3y + z + 2t = 4 \\ 4x + 3y + z + t = 5 \\ 5x + 11y + 3z + 2t = 2 \\ 2x + 5y + z + t = 1 \\ x - 7y - z + 2t = 7 \end{cases} , p = 17
 \end{aligned}$$

(3) Każdy z następujących układów rozwiązać w ciałach $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$, $\mathbb{Z}_{11}$:

$$\text{(a)} \begin{cases} x + 4y + 3z = 2 \\ 3x + 2y + 4z = 3 \\ 4x + y + z = 0 \end{cases} , \quad \text{(b)} \begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ x + 4y + 3z = 3 \\ 4x + 3z = 2 \end{cases} .$$

- (4) Pokazać, że układ równań $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$ jest sprzeczny w ciele $\mathbb{Z}_p$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$p = 2$.

- (5) Rozwiązać nad ciałem $\mathbb{C}$ liczb zespolonych układ równań

$$\begin{cases} 6ix + (-3 + 6i)y + (4 + 2i)z + (1 + 2i)t = 0 \\ (5 + 5i)x + (3 + 5i)y + (7 - 3i)z + (4 + 2i)t = 0 \\ (-3 + 3i)x + (-6 + 3i)y + (-1 + 3i)z - t = 0 \\ (1 + 11i)x + (1 + 12i)y + (11 + 7i)z + 7it = 0 \end{cases}$$

przy założeniu:

(a) $x = 0$, (b) $y = 0$, (c) $z = 0$, (d) $t = 0$, (e) $x + y = 0$.

- (6) Rozwiązać następujące układy nad ciałem $GF(2^3)$ zdefiniowanym przez wielomian $X^3 + X + 1$:

$$(a) \begin{cases} x + 100y + 011z = 010 \\ 011x + 010y + 100z = 011 \\ 100x + y + z = 0 \end{cases}, \quad (b) \begin{cases} 010x + 011y + z = 001 \\ x + 100y + 011z = 011 \\ 100x + 011z = 010 \end{cases}.$$

- (7) Znaleźć takie liczby rzeczywiste a, b, c, d by zachodziła równość wielomianów zmiennej X o współczynnikach rzeczywistych:

$$a \cdot 1 + b(X - 2) + c(X - 2)^2 + d(X - 2)^3 = 1 + X^3.$$

- (8) Wyznaczyć takie liczby zespolone a, b, c, d by zachodziła równość funkcji wymiernych zmiennej X o współczynnikach zespolonych:

$$\frac{4}{X^4 + 4} = \frac{a}{X + 1 + i} + \frac{b}{X + 1 - i} + \frac{c}{X - 1 + i} + \frac{d}{X - 1 - i}.$$

- (9) Rozwiązać nad ciałem $\mathbb{C}$ następujące układy równań:

$$(a) \begin{cases} (1 + i)x + 2iy - z = 3 + 2i \\ (3 + i)x + (1 - i)y + 4z = 6 + i \\ 5x + y - iz = 2 \end{cases}, \quad (b) \begin{cases} (1 + i)x + 2y - iz = 2 - 3i \\ 3x + iy + (2 - i)z = 6 + 4i \\ (4 + i)x + y + 3z = 6 + 6i \end{cases}.$$

- (10) Dla jakiego parametru $\lambda \in \mathbb{Z}_7$ układ równań $\begin{cases} x + 2y + 6z + 6t = 1 \\ x + y + z + 3t = 2 \\ 3x + 5y + 6z + t = \lambda \end{cases}$ nad ciałem $\mathbb{Z}_7$ ma rozwiązanie? Rozwiązać ten układ, gdy jest to możliwe.

- (11) W zależności od parametru $\lambda \in \mathbb{Q}$ rozwiązać układy równań:

$$(a) \begin{cases} 8x + 6y + 3z + 2t = 5 \\ -12x - 3y - 3z + 3t = -6 \\ 4x + 5y + z + 4t = 3 \\ \lambda x + 4y + z + 4t = 2 \end{cases}, \quad (b) \begin{cases} 2x - y + 3z + 4t = 5 \\ 4x - 2y + 5z + 6t = 7 \\ 6x - 3y + 7z + 8t = 9 \\ \lambda x - 4y + 9z + 10t = 11 \end{cases}, \quad (c) \begin{cases} \lambda x + y + z + t = 1 \\ x + \lambda y + z + t = 1 \\ x + y + \lambda z + t = 1 \\ x + y + z + \lambda t = 1 \end{cases}.$$

- (12) Do układu równań należą wszystkie równania $x + ny + nz = 1$ dla $n \in \mathbb{N}$. Znaleźć równoważny mu układ o najmniejszej ilości równań i rozwiązać go.

- (13) Z Księgi I "Arytmetyki" Diofantosa z Aleksandrii¹ (ok. 250 r.):

¹Diofantos (zapewne III w.) - matematyk grecki z Aleksandrii. Brak danych o jego życiu. Zachowało się 6 z 13 ksiąg "Arytmetyki" i fragmenty książki o liczbach wielokrotnych. W "Arytmetyce" Diofantos podał prawa działań na liczbach względnych i wprowadził niewiadomą - symbol literowy uczestniczy w działaniach na równi z liczbami i w zgodzie z prawami działań.

- (a) "Zadanie 16. Znaleźć trzy takie liczby, aby dodane parami dawały dane liczby. Potrzeba, by połowa sumy danych liczb była większa od każdej z nich."

$$\text{(Dla danych } a, b, c \text{ rozwiązać układ równań } \begin{cases} y + z = a \\ x + z = b \\ x + y = c \end{cases}).$$

- (b) "Zadanie 17. Znaleźć cztery takie liczby, żeby dodane po trzy dawały dane liczby."

$$\text{(Dla danych } a, b, c, d \text{ rozwiązać układ równań } \begin{cases} y + z + t = a \\ x + z + t = b \\ x + y + t = c \\ x + y + z = d \end{cases}).$$

- (c) "Zadanie 18. Znaleźć trzy takie liczby, aby dodane parami przewyższały pozostałą o daną liczbę."

$$\text{(Dla danych } a, b, c \text{ rozwiązać układ równań } \begin{cases} y + z = a + x \\ x + z = b + y \\ x + y = c + z \end{cases}).$$

- (d) "Zadanie 19. Znaleźć cztery takie liczby, żeby dodane po trzy przewyższały pozostałą o daną liczbę."

$$\text{(Dla danych } a, b, c, d \text{ rozwiązać układ równań } \begin{cases} y + z + t = a + x \\ x + z + t = b + y \\ x + y + t = c + z \\ x + y + z = d + t \end{cases}).$$

- (e) "Zadanie 20. Daną liczbę rozłożyć na trzy liczby tak, by każda ze skrajnych, dodana do środkowej miała dany stosunek do pozostałej."

$$\text{(Dla danych } a, k, m \text{ rozwiązać układ równań } \begin{cases} x + y + z = a \\ x + y = kz \\ y + z = mx \end{cases}).$$

- (f) "Zadanie 22. Znaleźć trzy takie liczby, które staną się równe, gdy każda odda następnej daną swoją część."

$$\text{(Dla danych niezerowych } a, b, c \text{ rozwiązać układ równań } (1 - \frac{1}{a})x + \frac{1}{c}z = (1 - \frac{1}{b})y + \frac{1}{a}x = (1 - \frac{1}{c})z + \frac{1}{b}y).$$

- (14) Wyznaczyć wszystkie rzeczywiste wartości niewiadomych x, y, z, t dla których:

$$(a) \begin{cases} x + 4y + 10z + 20t = x \\ -6y - 20z - 45t = y \\ 4y + 15z + 36t = z \\ -y - 4z - 10t = t \end{cases}, \quad (b) \begin{cases} x + 4y + 10z + 20t = -x \\ -6y - 20z - 45t = -y \\ 4y + 15z + 36t = -z \\ -y - 4z - 10t = -t \end{cases}.$$

- (15) Rozwiązać układ równań $\begin{cases} 20x - 10y + 4z - t = a \\ 70x - 36y + 15z - 4t = b \\ 84x - 45y + 20z - 6t = c \\ 35x - 20y + 10z - 4t = d \end{cases}$ w zależności od parametrów

$$a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$